



ANNALEN  
DER  
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.  
BAND X.



ANNALEN  
DER  
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND X.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT SECHSUNDVIERZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSbesondere DES HERRN

H. HELMHOLTZ

HERAUSGEgeben VON

G. WIEDEMANN.

NEBst VIER FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1880.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

zah  
be  
un  
ers  
Sc  
erz  
die  
hö

bei  
zu

zwe  
wiss  
erk  
Int  
zah  
dau  
die  
ein

sam  
tem

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND X.

I. *Ueber Töne, die durch eine begrenzte Anzahl von Impulsen erzeugt werden; von W. Kohlrausch.*<sup>1)</sup>

Die Frage nach der Tonwirkung einer begrenzten Anzahl von Wellen wurde schon von Seebeck<sup>2)</sup> gelegentlich berührt und ist in neuerer Zeit von Pfaundler<sup>3)</sup>, S. Exner<sup>4)</sup> und Auerbach<sup>5)</sup> eingehender behandelt worden. Die zwei erstgenannten Arbeiten fragen nach der Minimalzahl der Schwingungen, die überhaupt einen wahrnehmbaren Ton erzeugt, während die letzten diejenige Schwingungszahl suchen, die dem Tone seine volle Charakteristik bezüglich der Tonhöhe gibt.

Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, diese beiden Fragen durch Erweiterung einer jeden miteinander zu verknüpfen.

Ein bestimmtes Ohr möge im Stande sein, die Töne zweier Tonquellen von gegebener Klangfarbe bei einem gewissen Intervalle derselben eben noch als verschieden zu erkennen. Wir wollen die Frage stellen, wie gross dieses Intervall sei, wenn die eine Tonquelle eine beschränkte Anzahl von Schwingungen macht, während die andere andauernde, also völlig scharf definirte Töne gibt, und ob sich dieses für eine bestimmte Anzahl von Schwingungen der einen Tonquelle charakteristische Intervall mit der Tonhöhe

1) Ueber die Resultate dieser Untersuchung wurde auf der 52. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Baden-Baden im September 1879 berichtet.

2) Seebeck, Pogg. Ann. 58. p. 417. 1841.

3) Pfaundler, Wien. Ber. 76. p. 561. 1877.

4) S. Exner, Pflüger's Archiv. 13. p. 228. 1876.

5) Auerbach, Wied. Ann. 6. p. 591. 1879. u. a. a. O.

änder. Für unsere Zwecke muss also zunächst ein Apparat hergestellt werden, der einen Ton von beliebiger Tonhöhe und von beliebiger Schwingungsanzahl liefert. Der nächstliegende Gedanke, Tonquellen plötzlich zu erregen und nach der gewünschten Anzahl von Schwingungen zu dämpfen — s. S. Exner's oben citirte Arbeit — ist wegen der Unsicherheit der Dämpfung schwierig ausführbar. Andererseits würde ein Zahnrad — von Seebeck und Pfaundler wurden ähnliche Vorrichtungen verwendet — mit einer bestimmten Anzahl von Zähnen an einer Stelle des Umfangs den Ton zu oft wiederholen und dadurch die Beurtheilung beeinflussen, abgesehen von der Schwierigkeit, die die Herstellung einer beliebigen, aber constanten Rotationsgeschwindigkeit bietet.

Der einfachste und geeignete Weg scheint darin zu bestehen, dass man ein Pendel mit einem Stück Zahnrad, dessen Radius gleich der Pendellänge ist, von bestimmter Höhe fallen und durch Anschlagen der Zähne an ein Kartenblatt die gewünschte Anzahl von Impulsen erzeugen lässt.

**Der verwendete Apparat.** Eine 3 m lange Stange aus Tannenholz von  $30 \times 50$  mm Querschnitt ist an einem breiten Lederriemchen<sup>1)</sup> *a* (Tafel I Fig. 1) an der Zimmerdecke aufgehängt und unten bei *e* mit 6 Kilo beschwert. Seitlich ist eine Nase *c* angeschraubt, über welche der am Brett *b* auf und ab verstellbare Haken *d* greift. Das Brett ist an einer mit ca. 120 Kilo beschwerten Kiste festgeschraubt, und der durch eine Feder emporgedrückte Haken *d* kann vom Platze des Beobachters aus leicht und ohne Geräusch herabgezogen und dadurch das aufgehakte Pendel ausgelöst werden. Unten am Pendel ist ein Blech *h* mit den Schrauben *f* und *gg* befestigt, welche, auf ein Stück hartes Holz *i* drückend, durch dasselbe das Blech fest an die Pendelstange pressen. An dem mit dem Pendel concentrischen Rande des Blechs sind 31 Löcher im Abstande

1) Die Aufhängung an einem Riemen bewirkt allerdings eine starke Dämpfung, lässt aber das Pendel sehr ruhig schwingen, während es, an Stahlfedern aufgehängt, bei grossen Fallhöhen stets zitterte. Auch brachen die Federn nach kurzem Gebrauch.

von je 1 cm gebohrt. Ein anderes etwas längeres Blech, welches statt des ersten angeschraubt werden kann, trägt 24 Löcher im Abstande von 2 cm. Mit Schrauben und Muttern lassen sich Zähne *k* (Taf. I Fig. 2) auf das Blech festschrauben. Der Rand *l* der Zähne befindet sich unten senkrecht zur Schwingungsebene des Pendels.

Senkrecht unter dem Pendel ist die aus Holz gefertigte Vorrichtung (Taf. I Fig. 3) am Fussboden festgeschraubt. Der Schlitten *m* lässt sich in einem Schwabenschwanz zwischen den Leisten *n* vor- und rückwärts schieben und schlägt bei *o<sub>1</sub>* und *o<sub>2</sub>* beiderseits an; die schleifenden Federn *p* geben ihm leichte, aber sichere Führung. Der Schlitten trägt auf einer vermittelst der Schraube *q* höher und tiefer stellbaren elastischen Holzleiste *r* zwei Holzwangen *s*, und zwischen diesen halten die Flügelschrauben *tt* ein Stück einer Karte *u*. Durch Keile *v* aus Kautschuck oder Kork, die unter die im Schlitten befestigten Kniestücke *w* gesteckt werden, nachdem die Holzleiste und mit ihr die Karte in die gewünschte Höhe gestellt ist, wird seitliches Wackeln oder Schwingen der Holzleiste beim Anschlagen der Zähne an die Karte vermieden.

Steht der Schlitten bei *o<sub>2</sub>* an, so streifen die Zähne des Pendels die Karte an deren oberem Rande, beim Anschlag an *o<sub>1</sub>* gehen die Zähne frei hinter der Karte vorbei. Eine ähnlich wie dieser Schlitten verschiebbare Vorrichtung mit zwei in bestimmter Entfernung voneinander feststellbaren Contacthebeln, die in Quecksilbernäpfe tauchen und von einem Fortsatz des fallenden Pendels ausgelöst werden, erlaubt, die Geschwindigkeit des Pendels in unmittelbarer Nähe seiner tiefsten Lage durch Zeitmessung mittelst des Hipp'schen Chronoskops zu bestimmen. Der constante Fehler des Chronoskops wird durch Combination von Messungen bei verschiedenen Abständen der Contacthebel eliminiert.

**Versuchsanordnung.** Die Zähne werden zunächst nach einer am untern Rande der Blechs angebrachten Centimetertheilung auf dem Blech so angeschraubt, dass sie alle gleich weit über den Rand des Blechs vorstehen. Die Löcher sind so weit gebohrt, dass die Schrauben in ihnen den zur Einstellung nöthigen Spielraum haben. Dann werden die

Zähne mittelst eines feinen Stellzirkels möglichst genau auf den gewünschten Abstand — 2, 3 oder 4 cm — eingestellt und controlirt, sodass ein Fehler von 0,1 mm in der Einstellung der Zähne keinenfalls überschritten wird.

Mit der Schraube  $f$  wird demnächst das Blech am Pendel mässig angezogen und um  $f$  durch Klopfen so gedreht, dass alle Zähne gleichzeitig bei allmählichem Heben der Schraube  $g$  die Karte eben zu berühren beginnen. In dieser Stellung wird das Blech festgeschraubt und endlich die Karte so gestellt, dass der Ton deutlich und mit möglichst wenig Nebengeräusch entsteht.

Den Hauptimpuls gibt die Karte, wenn sie von einem Zahne losgelassen wird, während das Anschlagen der Zähne kaum zu hören ist. Deshalb wirkt der vom ersten Zahn mitgetheilte Impuls nicht störend, was geschehen müsste, wenn beim Anschlagen der Hauptimpuls entstände; denn der erste Zahn trifft die ruhende, die folgenden die schon bewegte Karte.

Das Pendel gab die besten Töne, wenn es mit dem Rande der Zähne voran, also wie der Pfeil in Taf. I Fig. 1 läuft, die Karte streifte; dementsprechend sind also die Zähne gestellt.

Der Abstand je zweier Zähne wurde nicht kleiner als 2 cm genommen. Eine Aenderung der Tonhöhe bei einer und derselben Fallhöhe liess sich durch Vergrösserung dieses Abstandes auf 3, 4 und 5 cm erreichen, sodass also in gewissen Grenzen eine bestimmte Tonhöhe nicht an eine bestimmte Fallhöhe gebunden ist.

Um die Geschwindigkeit  $v_h$  der Zähne im tiefsten Punkte aus der Fallhöhe zu bestimmen, wird zunächst durch Vergleich mit einem Fadenpendel der Schwingungspunkt des Pendels ermittelt, an dem Brett  $b$  die Höhe der tiefsten Lage des Schwingungspunktes markirt und die Fallhöhe desselben bei aufgehaktem Pendel gemessen. Die letztere und das Verhältniss der Abstände des Schwingungspunktes und der Zahnränder vom Pendeldrehpunkt geben  $v_h$ .

Die mit dem Chronoskop bestimmten Geschwindigkeiten stimmten mit den  $v_h$  innerhalb der Genauigkeit des Chrono-

skops gut überein. Andererseits ergibt sich noch einmal aus der Tonhöhe des Pendeltones und dem Abstande der Zähne die Geschwindigkeit  $v_n$  der Zähne im tiefsten Punkt.

Man liess nun, um nach der Handbewegung beim Auslösen des Pendels die zum Sammeln der vollsten Aufmerksamkeit für die Beobachtung nöthige Zeit zu haben, das Pendel erst auf seinem ersten Rückgange an die Karte anschlagen. Infolge dessen wird  $v_n$  im Mittel um ca. 2,2 Proc. kleiner als  $v_h$ .

Als zweite Tonquelle, welche die Vergleichstöne lieferte, diente ein Monochord. Eine Messingsaite von 1500 mm Länge war so gestimmt, dass bei der Einstellung des Steges auf den Theilstrich 375 mm der Ton des kürzern Theils der Saite dem einer Stimmgabel von 261 Schwingungen in der Secunde möglichst gleich war. Die Länge der Saite, die diesen Ton wirklich gibt, wird sodann durch häufige Versuche bestimmt und aus dieser Länge unter Berücksichtigung des empirisch durch einer Reihe König'scher Stimmgabeln ermittelten Einflusses der Steifigkeit und Ungleichmässigkeit der Saite die Tonhöhe der bei den Versuchen benutzten Vergleichstöne berechnet.

**Beobachtungsmethode.** Für einen bestimmten Abstand  $\alpha$  der Zähne sei ihre volle Zahl an dem Blech angesetzt, und auf dem Monochord, dessen Scala während der Einstellung dem Auge des Beobachters an der abzulesenden Stelle durch den Steg verdeckt ist, wird, unter Abdämpfung des zweiten Saitentheils mittelst eines leichten Tuches, der Ton gesucht, der noch eben von dem des Pendels als höher zu unterscheiden ist. Das Monochord erregt dabei ein leiser Anschlag mit einem leichten Lederhammer. Man vergleicht die Töne, indem man entweder das tönende Monochord kurz ehe der Ton des Pendels kommt, abdämpft oder es während desselben weiterklingen lässt, oder endlich indem man es unmittelbar nach ihm anschlägt, bis die richtige Stellung des Steges gefunden ist. Ebenso wird der eben als tiefer erkennbare Ton des Monochords bestimmt und beide Bestimmungen abwechselnd gewöhnlich dreimal wiederholt. Das Verhältniss der Schwingungszahlen des so beobachteten er-

kennbar tiefern zu der des erkennbar höhern Tones nennen wir das „charakteristische Intervall“ — kurz „ch. J.“ — für die betreffende Zahnzahl. Das was wir „ch. J.“ nennen, ist also das doppelte des Intervalls, welches zwei für das Ohr noch eben unterscheidbaren Töne bilden. Unter folgeweisem Abschrauben der äussersten Zähne wiederholte man für jede Zahnzahl dasselbe. Vor und nach jeder Beobachtungsreihe wurde die Saitenlänge, welche 261 Schwingungen gab (s. p. 5) bestimmt.

**Fehlerquellen.** Es liegt in der gestellten Aufgabe, dass eine gewisse Subjectivität der Beurtheilung des „ch. J.“, ganz abgesehen von der Versuchsanordnung, unvermeidlich ist. Diese zeigte sich zunächst dadurch, dass es vieler Versuchsreihen bedurfte, um zu einigermassen constanten Resultaten zu gelangen. Jedoch die Curven, die man sich mit der Anzahl der angewandten Zähne als Abscissen und dem beobachteten „ch. J.“ als Ordinaten construirt, haben bei der ersten Versuchsreihe schon dieselbe Form, wie bei den endgültigen; also nicht die Aenderung des „ch. J.“ mit der Zahnzahl, sondern nur sein absoluter Werth änderte sich mit zunehmender Uebung und Sicherheit der Beobachtung. Dabei muss ich erwähnen, dass das geringste Geräusch im Zimmer oder in der Umgebung eine normale Beobachtung unmöglich macht. Deshalb mussten alle Beobachtungen nachts angestellt werden. Schlagen von Stadtuhren, Sprechen auf der Strasse u. dgl. störte selbst bei geschlossenen Fenstern eine sichere Einstellung des Steges. Das zu Anfang störende schnarrende Geräusch der Zähne lernt man leicht überhören, wenn die Kante gut eingestellt ist.

Eine weitere Schwierigkeit bietet die Nothwendigkeit, alle Eigentöne der am Pendel befindlichen oder mit der Karte verbundenen Theile des Apparates abzudämpfen, die beim Anschlagen der Zähne an die Karte entstehen und gelegentlich den zu beobachtenden Ton verstärken oder modifiziren könnten. Durch Anschlagen der einzelnen Theile mit dem Lederhammer suchte man diese Töne auf und machte die wenigen, die sich bei den mannichfachen Verschraubungen etc. der Theile des Apparates doch noch erkennen liessen,

durch Einstopfen von Zeug u. dgl. in Zwischenräume, Belasten der betreffenden Holztheile etc. möglichst unschädlich, bis man keine Eigentöne bei neuem Klopfen wiederaufgefand. An dem Kartenstück, das ca. 20 mm breit war und 12—15 mm aus den es haltenden Holzwangen hervorragte, waren keine Eigentöne zu erkennen, die in den Bereich der beobachteten Tonhöhen gefallen wären. Der Eigenton des elastischen Holzstreifens, der die Wangen für die Karte trug, war, wie pag. 3 erwähnt, durch Kautschukeinlagen unterdrückt. Das Blech verlor durch Aufschrauben einer Holzleiste (s. Taf. I Fig. 1) seinen Eigenton vollständig. Die dann etwa noch vorhandenen Eigentöne können die Resultate bei Anwendung von vier und mehr Zähnen nur wenig beeinflussen, da sie an Stärke gegen die zu beobachtenden Töne verschwinden. Liess man das Pendel mit z. B. nur fünf Zähnen bei jedem Rückgang die Karte streifend ausschwingen, so ergab sich bei dem ganz allmählichen Sinken des Tones nie eine durch etwaige Resonanz des Apparates erzeugte Verstärkung an einer Stelle der Tonreihe.

Die unvermeidlichen kleinen Fehler in der Einstellung einzelner Zähne werden das „ch. J.“ umso mehr beeinflussen, je kleiner das beobachtete „ch. J.“ ist; aber ihr Einfluss muss immer klein bleiben, da das „ch. J.“ im allgemeinen grösser als 0,992, d. h. die beobachteten Intervalle zwischen dem Tone des Pendels und dem des Monochords nicht kleiner als 0,996 werden.<sup>1)</sup>

Eine weitere Fehlerquelle ist die, dass die Fallhöhe, also auch die Geschwindigkeit des Pendels eine andere ist, wenn die ersten und letzten Zähne, als wenn die mittelsten die Karte streifen, d. h. dass der Pendelton selbst vom Anfang zur Mitte sich erhöht und zum Schluss wieder vertieft. Das Intervall, das der zu Anfang des Blechs entstehende Ton mit dem von der Mitte erregten bildet, ist berechnet und wird in der Tabelle unter  $Av_1$  angegeben werden. Dasselbe wird bei der grössten Zahnzahl und der kleinsten Fallhöhe den grössten Einfluss haben.

1) Man vergleiche über diesen Punkt auch Seebeck's oben citirte Arbeit.

Ferner wird durch das Streifen der Zähne an der Karte die Geschwindigkeit der Pendelbewegung — abgesehen von der eben besprochenen Erhöhung und Vertiefung — abnehmen, während der Ton entsteht. Um das Intervall, durch welches infolge dieses Umstandes der Ton während seiner Dauer sinken wird, ungefähr schätzen zu können, liess man zunächst das Pendel bei jedem Rückgang anstreifend schwingen, bis es die tiefere Octave des Anfangstones erreichte. Dazu seien bei 16 Zähnen 40 Doppelschwingungen nöthig; liess man es jetzt 36 mal frei hin- und hergehen, dann anstreifen, so kam man beim 42. Rückgange des Pendels zur Octave. 36maliges Anstreifen des Pendels hat hier also ein Intervall von 20:21 bewirkt.

Da es sich nun zeigte, dass mit abnehmender Geschwindigkeit der verzögernde Einfluss durch das Anstreifen sehr bedeutend zunahm, so muss das durch einmaliges Anstreifen verursachte Intervall hier jedenfalls viel kleiner als 721:720 sein. Da jedoch kein sicherer Anhaltspunkt für die Grösse des so gemachten Fehlers zu finden ist, so sind einfach die in dieser Weise überschlagenen Intervalle des Tones zu Anfang und zu Ende des Anstreifens für 16 Zähne in der Tabelle unter  $\Delta v_2$  angegeben. Der Einfluss dieser letzten beiden Fehlerquellen macht sich bei einer der angeführten Beobachtungsreihen — s. die eingeklammerten Zahlen von Nr. 7 — der Tabelle bemerkbar.

**Resultate.** Ich lasse zunächst die Zusammenstellung der Resultate in einer Tabelle folgen. In der zweiten bis neunten Spalte (vertical) gibt die erste Reihe (horizontal) die Fallhöhe  $h$ , die zweite den Abstand  $\alpha$  benachbarter Zähne, die dritte die Tonhöhe des Pendeltones, wie sie sich als Mittel aus den Mitten aller Grenzen des „ch. J.“ für die verschiedenen Zahanzahlen ergibt. Diese Mitten, ausgedrückt in Schwingungszahlen, sind bei sonst gleichen Umständen und bei fünf und mehr Zähnen niemals um mehr als 0,2 Proc. von ihrem Mittel verschieden. Ferner gibt die vierte Reihe die aus dem Zahnabstand und der Tonhöhe gefundene Geschwindigkeit  $v_n$ , die fünfte die aus der Fallhöhe berechnete

Ge  
sie  
Za  
be  
in  
za  
de  
ze  
Za  
de  
di  
re  
te

$\frac{h}{\alpha}$   
 $n$   
 $v_n$   
 $v_h$   
 $\Delta v_2$   
 $\Delta v_3$

Nr.  
 $z = 2$   
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9,  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16

Geschwindigkeit  $v_h$  ( $\frac{m}{sec}$ ) im tiefsten Punkt, die sechste und siebente  $\Delta v_1$  und  $\Delta v_2$  (cf. p. 7, 8). Die achte Reihe enthält die Zahl, welche die zeitliche Aufeinanderfolge der Versuchsreihen bezeichnet, die 9. bis 23. Reihe endlich die „ch. J.“ für die in gleicher Reihe in der ersten Spalte angegebenen Zahenzahlen. Zu den „ch. J.“ jeder Versuchsreihe gehören die in denselben Spalten oben verzeichneten anderen Grössen. Die zehnte Spalte enthält die Mittel der „ch. J.“ je für dieselben Zahenzahlen — hier sind die eingeklammerten Zahlen aus dem oben p. 8 angeführten Grunde ausser Acht gelassen —, die elfte Spalte die nach später anzuführender Methode berechneten „ch. J.“ und die zwölft die Fehler der beobachteten gegen die berechneten Werthe.

$\lambda$	986	800	751	453	800	238	453	453	—	—	—
$\alpha$	20	20	20	20	30	20	30	40	—	—	—
$n$	244,2	221,5	212,3	164,1	147,3	120,5	110,4	81,4	—	—	—
$v_n$	4,88	4,43	4,25	3,28	4,42	2,41	3,31	3,26	—	—	—
$v_h$	4,98	4,49	4,35	3,38	4,49	2,45	3,38	3,38	—	—	—
$\Delta v_1$	0,9983	0,9979	0,9977	0,9963	0,9979	0,9928	0,9963	0,9963	—	—	—
$\Delta v_2$	0,9990	0,9989	0,9988	0,9980	0,9989	0,9950	0,9980	0,9980	—	—	—

„Charakteristische Intervalle“.

Nr.	6	1	8	3	2	7	5	4	Mittel	ber. ch. J.	Fehler
$z = 2$	0,9732	0,9639	0,9731	0,9726	0,9681	0,9737	0,9741	0,9727	0,9714	0,9582	+ 0,0132
3	—	0,9791	0,9788	0,9773	0,9778	0,9797	0,9803	0,9798	0,9790	0,9763	+ 0,0027
4	0,9811	0,9809	0,9836	0,9816	0,9826	0,9823	0,9836	0,9808	0,9821	0,9823	- 0,0002
5	0,9843	0,9844	0,9846	0,9858	0,9855	0,9860	0,9871	0,9844	0,9853	0,9853	± 00
6	0,9860	0,9871	0,9858	0,9871	0,9876	0,9878	0,9882	0,9868	0,9871	0,9872	- 01
7	0,9874	0,9884	0,9867	0,9866	0,9887	0,9887	0,9899	0,9896	0,9883	0,9884	- 01
8	0,9899	0,9886	0,9876	0,9892	0,9915	0,9900	0,9904	0,9903	0,9897	0,9892	+ 05
9	0,9899	0,9888	0,9891	0,9907	0,9915	0,9906	0,9915	—	0,9903	0,9899	+ 04
10	0,9913	0,9893	0,9896	0,9912	0,9894	0,9898	0,9928	—	0,9906	0,9904	+ 02
11	0,9911	0,9900	0,9900	0,9913	0,9901	0,9899	0,9926	—	0,9909	0,9908	+ 01
12	0,9912	0,9894	0,9907	0,9910	—	(0,9889)	—	—	0,9906	0,9911	- 05
13	0,9914	0,9901	0,9910	0,9931	—	(0,9891)	—	—	0,9914	0,9914	± 00
14	0,9906	0,9903	0,9914	0,9927	—	(0,9893)	—	—	0,9913	0,9916	- 03
15	0,9898	0,9921	0,9922	0,9921	—	(0,9893)	—	—	0,9916	0,9918	- 02
16	0,9914	0,9931	0,9922	0,9920	—	(0,9896)	—	—	0,9922	0,9920	+ 02

In der Tabelle sind von etwa 25 überhaupt angestellten Versuchsreihen die acht letzten vollzählig gegeben. Die „ch. J.“ sind nur bis zu 16 Zähnen mitgetheilt, da mit dem

grössern Blech (s. p. 3) auch bei den bezüglich  $\Delta v_1$  und  $\Delta v_2$  möglichst günstigen Bedingungen ein weiteres Abnehmen der „ch. J.“ nicht zu erreichen war. Es sind demnach hier, wohl infolge der Unvollkommenheit des Pendeltones, die kleinsten beobachteten Intervalle  $\frac{249}{250}$ , während ich beim Vergleich von Monochord und Stimmgabel Tonhöhenunterschiede im Intervalle von  $\frac{499}{500}$  noch sicher erkannte. Die mit mehr als 16 Zähnen erreichten Werthe schwankten unregelmässig um den zu 16 Zähnen gehörigen oder wurden, wie dies bei Nr. 7 schon von 12 Zähnen an sicher der Fall ist, infolge der  $\Delta v_1$  und  $\Delta v_2$  wieder grösser. Daraus folgt zunächst, dass hier im Einklang mit Hrn. Exners Beobachtung (derselbe fand 17, l. c.) von 16 Impulsen an die Charakteristik eines Tones bezüglich seiner Tonhöhe nicht mehr zunimmt.

Was die berechneten Werthe der „ch. J.“ anlangt, so geht aus Helmholtz „Lehre von den Tonempfindungen“ folgendes für die vorliegenden Beobachtungen hervor. Denken wir uns den Eigenton einer aus der Reihe der Corti'schen Fasern angegeben, so wird infolge des Mitschwingens diese selbst die grösste Amplitude haben, die benachbarten um so kleinere, je weiter sie symmetrisch nach beiden Seiten in der Reihe von der stärkst schwingenden entfernt liegen. Wenn nun nach zwei Schwingungen des die Corti'schen Fasern zum Mitschwingen erregenden Tones die beiderseits  $n$ te Faser mit  $\frac{1}{x}$  der Intensität der mittelsten stärkst erregten schwingt, so schwingt nach Helmholtz nach drei Schwingungen die  $\frac{n}{2}$ te mit derselben Intensität  $\frac{1}{x}$ , nach vier Schwingungen die  $\frac{n}{3}$ te, .... nach  $m$  Schwingungen die  $\frac{n}{m-1}$ te.

Demnach wird die Vertheilung der Amplituden der durch den dauernden Monochordton in den Corti'schen Fasern erregten Schwingungen stets die gleiche sein.

Unter der an sich wahrscheinlichen Annahme nun, dass ein und dasselbe Ohr im Stande ist, den Monochordton dann von demjenigen des Pendels zu unterscheiden, wenn die in-

folge des Monochordtones stärkst schwingende Faser durch den Pendelton zu einem bestimmten Bruchtheil der Amplitude erregt wird, mit der die durch den Pendelton am stärksten erregte Faser schwingt, so müssten auch unsere „ch. J.“ stets gleich sein dem „ch. J.“ für zwei Schwingungen dividirt durch die um 1 verminderde Zahnzahl.<sup>1)</sup> Dann hätte man jedoch bei einer beliebig grossen Zahnzahl ein beliebig kleines — beliebig der Einheit sich nähernndes — „ch. J.“ zu erwarten, welches, wie oben erwähnt, hier nicht erreicht wird, auch bei gleicher Klangfarbe beider zu vergleichenden Töne nie erreicht werden kann. Aber es wird für ein bestimmtes Ohr und zwei Töne von gegebener Klangfarbe, folglich auch für unseren Pendelton und Monochordton, ein kleinstes „ch. J.“ geben, welchem man sich etwa auf Grund der Helmholtz'schen Formel mit wachsender Zahnzahl immer mehr nähern müsste. Wenn es also erlaubt ist, dieses „kleinste ch. J.“ für die Vergleichung zweier Töne von gegebener Klangfarbe als Einklang aufzufassen, so müssten die Ueberschüsse, wenn ich mich so ausdrücken darf, der beobachteten „ch. J.“ über das „kleinste ch. J.“ dem Helmholtz'schen Gesetze folgen. Mit anderen Worten, diese Ueberschüsse, multiplicirt je mit der ihnen zukommenden um 1 vermindernden Impulszahl, müssten ein constantes Product geben. Da aber die Beobachtung infolge der p. 6—8 erörterten „Fehlerquellen“ dieses „kleinste ch. J.“ nicht liefern kann, so ist es durch Rechnung oder auch graphisch zu ermitteln. Für den Werth 0,9944 des „kleinsten ch. J.“ — womit also das dem Ohr unerreichbare Grenzintervall zu 0,9972 wird — werden diese Producte wirklich sehr nahe constant, nur für  $z = 3$  und  $z = 2$  werden sie aus später zu erörternden Gründen zu klein. Die in der Tabelle in der elften Spalte angeführten Werthe der „ch. J.“ wurden nun so gefunden, dass man das Mittel der constanten Producte je durch die um 1 verminderde Zahnzahl dividirte und zu dem „kleinsten ch. J.“, welches man

1) Wir nennen, dem gewöhnlichen Sprachgebrauch entsprechend, das Intervall 1:2 halb so gross als 1:4, und ebenso 0,996 halb so gross als 0,992.

gleich 0,9944 setzte, addirte. Durch die Schwierigkeit der Beobachtung sind wohl die geringen Abweichungen der beobachteten von den berechneten Werthen genügend gerechtfertigt. Den Grund für die schlechte Uebereinstimmung bei  $z = 3$  und  $z = 2$  glaube ich trotz aller Vorsicht in dem Pendeltone nahe liegenden schwachen Eigentönen des Apparates, die die selbst schwachen Pendeltöne von zwei und drei Zähnen verstärkten und verlängerten, um so mehr suchen zu dürfen, weil, während bei fünf und mehr Zähnen, wo die Pendeltöne noch stark sind, die Aenderung ihrer Schwingungszahlen, wie p. 9 erwähnt, 0,2 Proc. nie überstieg, sie bei drei Zähnen 1 Proc., bei zwei Zähnen gelegentlich 3 Proc. erreicht. Die Anwendbarkeit der Helmholtz'schen Formel vorausgesetzt, würde also für drei und 2 Zähne der berechnete Werth der „ch. J.“ der wahrscheinlichere sein.

Ein Blick auf die Tabelle veranlasst noch zu folgenden Bemerkungen. Man sieht, wie trotz der grossen Zahl der vorausgegangenen nicht mitgetheilten Beobachtungsreihen mit zunehmender Nummer in der achten Reihe, also durch fortgesetzte Uebung in der Beurtheilung die Intervalle im Mittel immer noch etwas abnehmen. Ausserdem scheint es, und hauptsächlich die graphische Darstellung der einzelnen Curven macht dies wahrscheinlich, dass mit abnehmender Schwingungszahl  $n$  — die Beobachtungsreihen sind in der Tabelle nach abnehmenden Schwingungszahlen geordnet — die „ch. J.“ ebenfalls um ein wenig abnehmen. Das würde vielleicht dahin zu deuten sein, dass bei abnehmender Schwingungszahl  $n$  der Ton der gleichen Zahanzahl  $z$  dem Ohr eine grössere Zeit zur Vergleichung des Pendeltones mit dem Monochordtone zur Verfügung stellt und es ihm dadurch ermöglicht, kleinere Tonhöhenunterschiede noch aufzufassen. Ich lege jedoch auf diesen Umstand um so weniger Gewicht, da die tieferen Töne häufig auch bei grossen Fallhöhen durch grössere Zahnabstände erzeugt wurden, sodass die kleineren „ch. J.“ der tieferen Töne auch eine Folge der verhältnissmässig kleineren Fehler in der Zahneinstellung sein können.

Das Resultat der vorliegenden Arbeit dürfte als eine

mindestens annähernde experimentelle Bestätigung der Helmholtz'schen Theorie des Mitschwingens der tonempfindenden Organe im Ohr aufzufassen sein; es dürfte ferner feststellen, dass ein Ton von absolut genommen zwei Schwingungen in den Grenzen der beobachteten Tonhöhen von einem andauernden Tone jedenfalls dann als verschieden erkennbar ist, wenn er mit demselben ein Intervall von  $\frac{24}{25}$ <sup>1)</sup> bildet, und dass schliesslich in genügender Uebereinstimmung mit den Untersuchungen von Hrn. S. Exner und Hrn. Auerbach für ein Ohr von mittlerer Feinheit in Auffassung der Tonhöhen die mögliche Schärfe in der Definition der Höhe eines Tones nicht mehr merklich zunimmt, nachdem 16 Schwingungen desselben vergangen sind.

Physikal. Institut der Univ. Strassburg, Aug. 1879.

---

## II. *Ueber die Torsion<sup>2)</sup>; von E. Warburg.*

---

§ 1. Die vorliegende Untersuchung über die Torsion von Metalldrähten wurde ursprünglich unternommen in der Absicht, eine von mir entwickelte Theorie<sup>3)</sup> zu prüfen, in welcher ich die Hypothese, ein fester Körper bestehe aus beliebig gestalteten, gleichartigen Molekülen, in ihre Consequenzen verfolgte. Da ich indessen in dieser Theorie vorerst einen guten Leitfaden für die experimentelle Untersuchung nicht gefunden habe, so ziehe ich es vor, die Resultate der Versuche ohne Rücksicht auf die genannte Theorie darzustellen.

In dem von mir zur Untersuchung der Torsionselasticität benutzten Apparat wird das Torsionsmoment eines Drahtes

---

1) Vergl. Wied. Ann. 7. p. 386. 1879.

2) Ausführlicher mitgetheilt in den Freib. Ber. 7. p. 444—499. 1880.

3) Freib. Ber. 7. p. 225—59. 1878. — Wied. Ann. 4. p. 232—49.

verglichen mit dem Directionsmoment<sup>1)</sup>, welches auf einen bifilar aufgehängten Körper  $K_1$  wirkt. Der zu prüfende Draht hängt in der Mitte zwischen den Fäden herab und der an dem Draht aufgehängte Körper  $K_2$  kann mit  $K_1$  durch leichte Bügel verbunden werden, welche über Stahlspitzen geschoben sind und bewirken, dass die Drehungen von  $K_1$  und  $K_2$  um die gemeinschaftliche Drehungsaxe stets dieselben sind.

Taf. I Fig. 4 zeigt die einzelnen Theile des Apparates und ihre Anwendung.

Alles wird oben getragen von einem in die Wand eingelassenen starken eisernen Arm  $A$ , welcher aus einem geraden ( $g$ ) und einem ringförmigen Theil ( $a$ ) besteht. An den geraden Theil ist ein Halter  $h$  aus starkem Messingblech durch die Köpfe zweier Metallschrauben  $e, e$  befestigt, welche durch einen langen und breiten Schlitz in dem Halter hindurchgehen; in den untern Theil des Halters sind zwei schwach conische Löcher im Abstand von ungefähr 30 mm eingebohrt, in welchen mittelst zweier Metallpfölke  $f, f$  die beiden Enden des um die ungefähr 30 mm breite, leicht drehbare Rolle  $r$  geschlungenen Fadens festgeklemmt werden. Lockert man die Schrauben  $e$ , so kann durch Verschieben des Halters  $h$  die Mittellinie der beiden Fadentheile mit der Axe des zwischen ihnen herabhängenden Drahtes zur Coincidenz gebracht werden. An die Rolle ist das Schiffchen  $n$

1) Das Drehungsmoment, welches auf einen kreisförmig cylindrischen Draht vom Radius  $R$  und der Länge  $L$  wirkt, wenn der untere Querschnitt gegen den oberen um den Winkel  $q$  verdreht ist, beträgt  $\tau \cdot \frac{R}{L} \cdot q = D_2 \cdot q$ , wo  $\tau$  eine dem Material des Drahtes eigenthümliche Constante ist.  $\tau$  nenne ich den Torsionscoefficienten,  $D_2 = \tau \cdot \frac{R}{L}$  das Torsionsmoment des Drahtes. Das Drehungsmoment, welches auf einen bifilar aufgehängten Körper wirkt, wenn er um den unendlich kleinen Winkel  $\Theta$  aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht ist, beträgt:

$$D_1 \Theta = (A + 2 \cdot T) \cdot \Theta,$$

wo  $A$  von der Schwere herrführt, und  $T$  das Torsionsmoment eines der Fäden ist.  $D_1$  nenne ich das Directionsmoment des bifilar aufgehängten Körpers.

mit dem Gewicht  $p$ , dem Ablesespiegel  $m$  und den Stahlspitzen  $s_1, s_2$  befestigt.

In dem ringförmigen Theil  $a$  des Armes  $A$  wird durch drei starke Schrauben der von Breithaupt angefertigte Torsionskreis  $T$  gehalten, der in ganze Grade getheilt ist und mittelst Nonius Zehntelgrade angibt. Die kreisförmige Alhidale trägt die Klemme  $k$  mit einer der Axe des Kreises entsprechenden Marke, welche den Befestigungspunkt des oberen Drahtendes angibt. Das untere Drahtende ist in die um  $\alpha\alpha$  drehbare Walze  $\gamma$  eingeklemmt; die Drehungsaxe  $\alpha\alpha$  ist verbunden mit dem horizontalen Ring  $\delta$ , welcher selbst um die zu  $\alpha\alpha$  senkrechte Axe  $\beta\beta$  drehbar ist. Mit der Drehungsaxe  $\beta\beta$  ist sodann der vertikale Ring  $R$  verbunden. Die Aufhängung des Ringes  $R$  mittelst gekreuzter Axen hat erstens den Zweck, Biegungen des Drahtes zu vermeiden. In der That wird durch diese Aufhängung bewirkt, dass die Wirkungslinie des mit  $\beta\beta$  verbundenen Gewichtes stets durch den Durchschnittspunkt von  $\alpha\alpha$  und  $\beta\beta$  hindurchgeht; endigt nun der Draht in diesem Punkt, so ist das auf ihn wirkende biegende Moment Null. Die Drehbarkeit der Axen  $\alpha\alpha$  und  $\beta\beta$  wird, wo es erforderlich scheint, durch Anziehen der Schrauben  $\epsilon, \epsilon$  und  $\iota, \iota$  aufgehoben. Durch diese Schrauben kann auch der Durchschnittspunkt von  $\alpha\alpha$  und  $\beta\beta$  verlegt werden, was bei einer andern Anwendung der besprochenen Aufhängung benutzt wird. Der Ring  $R$  geht um den Körper  $K_1$  herum, er trägt zwei Stahlspitzen  $s_2, s_2$ , über welche Glasperlen geschoben sind, und welche durch sehr leichte übergelegte Bügel  $b, b$  mit  $s_1, s_1$  verbunden werden können. Durch ein an dem Ring  $R$  verschiebbares Laufgewicht  $q$  (galvan. Klemme) kann die Einstellung des Ringes  $R$  gegen das Schiffchen  $n$  verändert und dadurch bewirkt werden, dass, wenn durch passende Drehung des Drahtes der Abstand zweier Spitzen  $s_1, s_2$  der Länge des einen Bügels gleich gemacht ist, dann der Abstand der andern beiden Spitzen  $s_1, s_2$  der Länge des andern Bügels gleich kommt.

An den Ring  $R$  kann mittelst der an seinen untern Theil angebrachten Klemme entweder eine Vorrichtung zur Aufnahme spannender Gewichte, oder ein Draht mit verticalem

Blech befestigt werden, welches in ein ringförmiges, mit Oel gefülltes Gefäss taucht; wo es weniger auf Schnelligkeit als auf grosse Präcision ankommt, wird die Oeldämpfung nicht benutzt.

Gegen Luftströmungen wird das Ganze durch ein Pappgehäuse mit passend angebrachten Durchsichten geschützt.

Weitere Vorrichtungen werden an dem gehörigen Ort beschrieben werden.

§ 2. Mittelst dieses Apparates können dreierlei Bestimmungen ausgeführt werden.

Erstens kann das Torsionsmoment  $D_2$  des Drahtes bestimmt werden in Theilen des Directionsmomentes  $D_1$  des bifilar aufgehängten Körpers, d. h.  $\frac{D_2}{D_1}$  bestimmt werden durch Ablenkungsversuche. Dazu wird dem oberen Drahtquerschnitt eine gemessene Drehung ertheilt und die dadurch hervorgebrachte Drehung der verbundenen Körper  $K_1$  und  $K_2$  beobachtet.

Der Torsionskreis werde um den Winkel  $\varphi' - \varphi$  gedreht, und dabei gehe der Winkel  $\Theta$ , um welchen der bifilar aufgehängte Körper  $K_1$  aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht ist, in  $\Theta'$  über; dann ist

$$(1) \quad \frac{D_2}{D_1} = \frac{\sin \Theta' - \sin \Theta}{\varphi' - \varphi - (\Theta' - \Theta)} \left\{ 1 + \frac{2T}{D_1} \left( \frac{\Theta' - \Theta}{\sin \Theta' - \sin \Theta} - 1 \right) \right\},$$

wo  $T$  das Torsionsmoment eines der beiden Fäden bedeutet, an welchen  $K_1$  aufgehängt ist.

Indem man sich einen angenäherten Werth von  $\frac{2T}{D_1}$  leicht verschafft, kann der Unterschied der Klammergrösse von der Einheit, wenn er überall innerhalb des zu Berücksichtigenden liegt, leicht mit hinlänglicher Genauigkeit berechnet werden.

Auch durch kleine temporäre Torsionen entstanden, wie schon Wertheim<sup>1)</sup> und G. Wiedemann<sup>2)</sup> bei ähnlichen Versuchen gefunden haben, zwar nur sehr kleine, aber nicht unmerkliche permanente Torsionen, welche sich indess durch

1) Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3) **50.** p. 221. 1857.

2) Wiedemann, Baseler Verhandlungen **2.** p. 178. 1860.

Wiederholung der Drehung von  $\varphi$  auf  $\varphi'$  nicht vergrösserten. Für  $\Theta$  wurde immer der Werth genommen, welchen der betreffende Winkel zeigte, wenn der Torsionskreis nach erfolgter Drehung von  $\varphi$  auf  $\varphi'$  wieder auf  $\varphi$  zurückgedreht worden war. Man bestimmte  $\frac{D_2}{D_1}$  jedesmal für die Drehung um  $\varphi' - \varphi$  nach der einen und nach der andern Seite und nahm aus beiden Bestimmungen das Mittel.

Zweitens kann die Bestimmung von  $\frac{D_2}{D_1}$  durch Schwingungsversuche ausgeführt werden; dazu beobachtet man drei Schwingungsdauern; die Schwingungsdauer des bifilar aufgehängten Körpers  $K_1$  ( $\tau_1$ ), des am Draht aufgehängten Körpers  $K_2$  ( $\tau_2$ ) und des Systems, welches man bildet, indem man  $K_1$  und  $K_2$  durch die Bügel verbindet ( $\tau_3$ ).

Sind  $i_1, i_2, i_3$  die vom Luftwiderstand herrührenden Vergrösserungen des Trägheitsmoments der Körper  $K_1$ ,  $K_2$  und des Systems bei den auf unendlich kleine Amplituden bezüglichen Schwingungsdauern  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  und  $\tau_3$ , so ist:

$$(2) \quad \frac{D_2}{D_1} = \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_3^2} + 4 \pi^2 \cdot \frac{i_3 - i_1 - i_2}{D_1 (\tau_3^2 - \tau_2^2)}.$$

Wäre die Vergrösserung des Trägheitsmoments durch den Luftwiderstand von der Schwingungsdauer unabhängig, so würde das zweite Glied auf der rechten Seite verschwinden, und man hätte:

$$(2a) \quad \frac{D_2}{D_1} = \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_3^2}.$$

Dass die letzte Formel für meinen Apparat ohne merklichen Fehler angewandt werden kann, lehrt folgendes Experiment. Es wurden an den Ring  $R$  zwei Cartonblätter so angeheftet, dass sie beim Schwingen mit ihren breiten Flächen gegen die Luft stiessen; die stossende Fläche des Ringes betrug beiläufig 73 qcm bei einem mittlern Abstand = 6 cm von der Drehungsaxe; die der Cartonblätter 128 qcm bei einem mittlern Abstand = 7 cm von der Axe. Es wurden nun die drei Schwingungsdauern  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  gemessen und  $\frac{D_2}{D_1}$  für den Stahldraht (0,343 mm Durchmesser, 0,524 mm Länge), an welchem bei diesen Versuchen  $K_2$  hing, berechnet. Es ergab sich:

## Ring mit Cartonblättern

Temp. 18°

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 1,4009'' \\ \tau_2 &= 13,017 \\ \tau_3 &= 5,5577\end{aligned}\quad \begin{aligned}\frac{D_2}{D_1} &= 0,2088\end{aligned}$$

## Ring ohne Cartonblätter

Temp. 18°

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 1,4009'' \\ \tau_2 &= 12,127 \\ \tau_3 &= 5,1986\end{aligned}\quad \begin{aligned}\frac{D_2}{D_1} &= 0,2088\end{aligned}$$

Aus der vollständigen Uebereinstimmung der in beiden Versuchsreihen gefundenen Werthe von  $\frac{D_2}{D_1}$  folgt, dass die Gleichung 2a ohne merklichen Fehler benutzt werden darf.

Eine wichtige Fehlerquelle kann die Bestimmung von  $\tau_3$  beeinflussen. Es ist in der Theorie vorausgesetzt, dass die Drehungen der mittelst der Bügel verbundenen Körper  $K_1$  und  $K_2$  dieselben seien. Wenn nun die Reibung der Bügel an den Glasperlen, auf welchen sie ruhen, nicht hinreichend ist, so geschieht es, dass wenn beim Springen  $K_1$  schon zur Ruhe gekommen ist,  $K_2$  noch etwas weiter sich dreht, da die Bügel an den Spitzen nicht genau anschliessen. Diese Unregelmässigkeit, welche besonders leicht eintritt, wenn das Trägheitsmoment von  $K_2$  gross ist, würde eine scharfe Bestimmung von  $\tau_3$  unmöglich machen. Ich vergrösserte daher die Reibung an den Bügeln dadurch, dass ich zwischen sie und die Perlen etwas Baumwolle brachte; wählte ich dabei die Amplituden hinreichend klein (etwa 1°), so fand ich die genannte Fehlerquelle unmerklich.

Wegen der thermischen Ausdehnung der verschiedenen Theile des Apparates, sowie wegen der Abhängigkeit des Torsionscoefficienten von der Temperatur müssen sowohl die statischen wie die dynamischen Versuche auf gleiche Temperatur reducirt werden; die erforderlichen Reductionsformeln sind in § 11 der ausführlichen Abhandlung zusammengestellt.

Drittens kann der Apparat zu einem beliebig empfindlichen Instrument für kleine Äenderungen des Torsionsmoments gemacht werden; dazu muss dem Draht eine Torsion ertheilt werden, durch welche das System um 90° oder mehr herumgedreht wird. Zur Erläuterung dieses Falls genügt es, aus einer im § 8 der ausführlichen Abhandlung durchgeföhrten Untersuchung hier zu bemerken, dass für

$\frac{D_2}{D_1} = \varepsilon$  kleiner als 1, wenn durch  $\Theta_1$  die kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$\varepsilon + \cos \Theta = 0$$

bezeichnet wird, nur Werthen von  $\Theta$ , die kleiner als  $\Theta_1$  sind, stabile Gleichgewichtslagen entsprechen; ferner, dass für  $\Theta = \Theta_1$  die Empfindlichkeit des Apparates in Bezug auf  $\varepsilon$ , welche mit  $\frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon}$  proportional ist, unendlich gross wird. Durch passende Drehung des Torsionskreises kann man nun  $\Theta$  dem Werth  $\Theta_1$  beliebig annähern und so die Empfindlichkeit beliebig gross machen.

Wie ich nachträglich gefunden, hat zuerst J. A. Broun<sup>1)</sup> und unabhängig von ihm Babinet<sup>2)</sup> eine ähnliche Vorrichtung zur Messung der Variation der Schwere angegeben, deren Intensität in meinem Apparat als constant vorausgesetzt wird.

§ 3. Meine Versuche betrafen Drähte aus Stahl, Eisen, Kupfer, deren Durchmesser 0,3 bis 0,5 mm und deren Länge etwa 520 mm betrug; sämmtliche Drähte wurden vor den Versuchen in freier Luft oder im Wasserstoffstrom unter schwacher Spannung ausgeglüht; sie hingen dann, am oberen Ende befestigt, auch ohne Belastung ganz gerade herunter.

Ich stellte mir zuerst die Frage, inwieweit diese Substanzen, wenn man ihr Verhalten bei sehr kleinen Deformationen untersucht, die Forderungen der Elasticitätstheorie für vollkommen elastische Körper erfüllen, und zwar waren mir dabei folgende Fragen von Interesse:

Erstens, inwieweit der dynamisch und statisch bestimmte Torsionscoefficient derselbe ist;

Zweitens, inwieweit die Spannung des Drahtes ohne Einfluss auf den Torsionscoefficienten ist.

Nach den Versuchen von Kupffer<sup>3)</sup> würde der Elasti-

1) Broun, Compt. rend. 56. p. 1135. 1861.

2) Babinet, Compt. rend. 56. p. 244—48. 1863.

3) Kupffer, Compt. rend. Annuel 1852. Suppl. aux Annales de l'observatoire Phys. Central pour l'année 1850.

citätscoëfficient aus statischen Biegungsversuchen sich grösser ergeben, als aus Transversalschwingungen.<sup>1)</sup>

Wertheim<sup>2)</sup> findet, mit Ausnahme des Eisens, den Elasticitätscoëfficienten aus Verlängerungsversuchen durchweg kleiner, als aus Transversal- und Longitudinalschwingungen und zwar gewöhnlich um mehrere Procente.

Diese auch von andern Beobachtern bestätigte Thatsache führt nach F. Kohlrausch<sup>3)</sup> von der elastischen Nachwirkung her.

Der Einfluss der Spannung auf das Torsionsmoment ist von Kupffer<sup>4)</sup> und neuerdings von F. Braun<sup>5)</sup> untersucht worden; während aber Kupffer das Torsionsmoment eines 4 mm dicken Messingdrahtes durch Zufügen eines Zuges von  $6,33 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  kaum mehr verkleinert fand, als die Veränderung der Dimensionen durch den Zug erwarten liess, würde nach F. Braun das Torsionsmoment einer 0,67 mm dicken Stahlsaite durch Zufügen eines Zuges von  $8,55 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  eine 30—50 mal so grosse Verkleinerung erfahren haben, als die ist, welche durch Veränderung der Dimensionen eintreten musste.

Man kann demnach nicht sagen, dass das vorliegende Beobachtungsmaterial zur Entscheidung der gestellten Fragen ausreiche.

Ich lasse nun zuerst in Tab. 1 das vollständige Beobachtungsmaterial für einen Stahldraht folgen und stelle sodann in der Tab. 2 die Resultate aller Versuche, soweit sie die beiden genannten Fragen betreffen, zusammen.

1) nach Zöppritz Rechnung, Pogg. Ann. 129. p. 219 fl. 1866.

2) Wertheim, Pogg. Ann. Ergbd. 2. p. 1 fl. 1848.

3) Kohlrausch, prakt. Phys. 3. Aufl. p. 82. 1877.

4) Kupffer, Compt. rend. Annuel. 1851.

5) Braun, Pogg. Ann. 159. p. 352—54. 1876.

## Stahldraht.

Länge 524,2 mm.  $r_1 = 1,397''$ . Durchmesser 0,343 mm.Dynamische Bestimmung von  $\frac{D_2}{D_1}$ .

1. Reihe: Belastung A. 12. März.

Amplitude	Temp.	$r_2$	$r_3$	$r_2$ und $r_3$ red. auf 22°	
1° 6' bis 0° 50'	22,1°	—	5,2128"	5,2128"	$r_1 = 1,397''$
1° 23' " 0° 43'	22,2°	—	5,2131"	5,2130"	$r_3 = 5,2129''$
4° 6' " 3° 20'	22,5°	12,1604"	—	12,159"	$r_2 = 12,159''$
3° 3' " 2° 10'	22,5°	12,1600"	—	12,159"	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2090$ bei 22°

2. Reihe: Belastung A + B. 14. März.

Amplitude	Temp.	$r_2$	$r_3$	$r_2$ und $r_3$ red. auf 22°	
1° 54' bis 0° 48'	20,9°	—	5,8836"	5,8839"	$r_1 = 1,397''$
1° 57' " 0° 32'	22°	—	5,8835"	5,8835"	$r_3 = 5,8838''$
4° 14' " 3° 7'	22,5°	13,8302"	—	13,828"	$r_2 = 13,825''$
3° 8' " 2° 24'	22,8°	13,8233"	—	13,820"	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2087$ bei 22°

3. Reihe: Belastung A. 14. März.

Amplitude	Temp.	$r_2$	$r_3$	$r_2$ und $r_3$ red. auf 21°	
1° 39' bis 0° 43'	21°	—	5,2118"	—	$r_1 = 1,397''$
2° 6' " 0° 48'	20,9°	—	5,2123"	—	$r_3 = 5,2121''$
2° 7' " 1° 12'	21°	12,1551"	—	12,155"	$r_2 = 12,156''$
6° 13' " 4° 29'	20,8°	12,1559"	—	12,157"	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2091$ bei 21°
					0,2090 bei 22°

4. Reihe: Belastung A + B. 14. März.

Amplitude	Temp.	$r_2$	$r_3$	$r_2$ und $r_3$ red. auf 21°	
1° 10' bis 0° 28'	21°	—	5,8847"	—	$r_1 = 1,397''$
1° 21' " 0° 38'	21°	—	5,8851"	—	$r_3 = 5,8849''$
6° 2' " 2° 51'	21,2°	13,8228"	—	13,822"	$r_2 = 13,822''$
2° 38' " 2° 4'	21,3°	13,8231"	—	13,822"	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2089$ bei 21°
					0,2088 bei 22°

5. Reihe: Belastung A. 14. März.

Amplitude	Temp.	$r_2$	$r_3$	$r_2$ und $r_3$ red. auf 22°	
1° 50' bis 0° 48'	21,5°	—	5,2120"	5,2122"	$r_1 = 1,397''$
2° 19' " 0° 51'	21,7°	—	5,2114"	5,2115"	$r_3 = 5,2119''$
3° 8' " 2° 15'	22,2°	12,1539"	—	12,153"	$r_2 = 12,155''$
3° 10' " 2° 13'	22,4°	12,1587"	—	12,157"	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2091$ bei 22°

Statische Bestimmung von  $\frac{D_2}{D_1}$ .  
 $\Theta_0 = - 0^\circ 2' 21''$

Torsion nach der posit. Seite	Torsion nach der negat. Seite
$\Theta = - 0^\circ 3' 19''$	$\Theta = + 0^\circ 0' 41''$
$\Theta' = + 0^\circ 44' 9''$	$\Theta' = - 6^\circ 10' 12''$
$\varphi = 0$	$\varphi = 0$
$\varphi' = + 25^\circ 30'$	$\varphi' = - 25^\circ 30'$
$\Delta\alpha = - 0^\circ 5' 6$	$\Delta\alpha = + 0^\circ 17' 6$
$\frac{D_2}{D_1} = 0,2104$	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2072$
Mittel $\frac{D_2}{D_1} = 0,2088$ bei $22,8^\circ$ . $0,2089$ „ $22^\circ$ .	

Erklärung der Bezeichnung.  $\Theta_0$  ist der Winkel, um den der bifilar aufgehängte Körper  $K_1$  nach dem Einlegen der Bügel aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht wurde, die Torsion des Drahtes beträgt dabei immer nur einige Minuten, der Index des Torsionskreises hat dabei die durch  $\varphi = 0$  bezeichnete Stellung. Nachdem die Torsion, welche durch das Drehen des Kreises von  $\varphi$  auf  $\varphi'$  hervorgebracht worden, wieder aufgehoben war, hatte der Draht eine kleine permanente Torsion erfahren, infolge deren bei gleicher Stellung des Torsionskreises ( $\varphi = 0$ )  $\Theta_0$  in  $\Theta$  übergegangen war. Die Verschiebung  $\Delta\alpha$  der Torsionsgleichgewichtslage infolge der stattgehabten Deformation berechnet sich nach der Formel  $\Delta\alpha = (\Theta - \Theta_0) \cdot \frac{D_1 + D_2}{D_2}$ .

Tabelle 2.

Material	Spannung A = 390 g			Spannung A + B = 1309 g	
	Temp.	$\frac{D_2}{D_1}$ dyn.	$\frac{D_2}{D_1}$ stat.	$\frac{D_2}{D_1}$ dyn.	$\frac{D_2}{D_1}$ stat.
Stahl . . . . .	22°	0,20903	0,20885	0,20875	—
Eisen . . . . .	20°	0,2123	0,2109	0,2124	0,2109
Kupfer . . . . .	20°	0,4082	0,3999	0,4089	0,3987

Dimensionen der benutzten Drähte:

	Länge	Durchmesser
Stahl . . . . .	524,2 mm	0,343 mm
Eisen . . . . .	520 „	0,332 „
Kupfer . . . . .	520 „	0,464 „

In Betreff der Versuche sei noch bemerkt, dass bei ihnen eine Oeldämpfung nie benutzt ward; dass die Spannung *B* durch den in der Figur mit *B* bezeichneten schwach conischen Bleiklotz zugefügt wurde; endlich dass vor Beginn der definitiven Versuche durch mikroskopische Beobachtung constatirt ward, dass durch Zufügen des Gewichts *B* keine permanente Verlängerung des Drahtes eintrat.

Die Tabelle 2 zeigt nun Folgendes:

1) Die statisch bestimmten Torsionsmomente sind sämmtlich kleiner als die dynamisch bestimmten, die Differenzen steigen von 1 pro Mille für Stahl auf 6 pro Mille für Eisen und 28 pro Mille für Kupfer. Elastische Nachwirkung beeinflusste bei all diesen Versuchen nicht merklich die statische Bestimmung.<sup>1)</sup> Auf die Erklärung dieser Thatsachen weist der Umstand hin, dass, wie schon Kupffer<sup>2)</sup> und Pisati<sup>3)</sup> gezeigt haben, die Schwingungsdauer eines Metalldrahtes mit wachsender Amplitude wächst; für den von mir benutzten Kupferdraht war die Schwingungsdauer bei einer Amplitude von  $7^{\circ}$  schon im Verhältniss von 1,0023 : 1 grösser, als bei sehr kleinen Amplituden. Beim Stahl und Eisen war zwar bis zu Amplituden von  $11^{\circ}$  — den grössten, welche vorkamen — die Schwingungsdauer nicht merklich von der Amplitude abhängig; allein es wurden bei den statischen Versuchen Torsionen von  $25^{\circ}$ , bei den dynamischen hingegen sehr kleine angewandt. Die obigen Thatsachen scheinen daher ihre einfachste Erklärung darin zu finden, dass die elastischen Pressungen etwas langsamer wachsen, als die Deformationen, und zwar ist die Abweichung von der Proportionalität für Kupfer grösser als für Eisen, und für Eisen grösser als für Stahl, für das letztere Material bei den an-

1) Es soll damit nicht gesagt sein, dass die Bemerkung von Kohlrausch p. 20 bei anderen Materialien nicht in Kraft treten könne. Noch sei hier bemerkt, dass die Kraft, welche Ursache der Drahdämpfung ist, bei der beobachteten Kleinheit der letzteren die dynamische Bestimmung des Torsionscoefficienten höchstens um einige Milliontel des ganzen Werthes beeinflussen kann.

2) Kupffer, Mém. de l'acad. imp. des sciences de St. Pétersbourg. 5. p. 251. 1853; 6. p. 423 ff. 1857.

3) Pisati, Gaz. chim. ital. 7. p. 181. 1876.

gewandten Torsionen in der That kaum merklich. Es scheint damit zusammenzuhängen, dass die Elasticitätsgrenze für Stahl höher als für Eisen und für dieses höher als für Kupfer liegt.

2) Eine Abhängigkeit des Torsionscoefficienten von der Spannung hat sich innerhalb der Versuchsgrenzen nicht ergeben.

Das grösste Gewicht hat das für den Stahl erhaltene Resultat, die angegebenen Werthe sind die Mittel aus bz. 2 und 3 unabhängigen Versuchen, wobei die einzelnen Werthe nicht um  $\frac{1}{2000}$  des ganzen Werthes von einander abweichen.

Der durch die Spannung  $B$  zugefügte Zug betrug  $9,95 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ ; berechnet man danach mittelst der Elasticitätsconstanten des Stahls, indem man den Torsionscoefficienten als constant betrachtet,  $\frac{D_2}{D_1}$  für die Spannung  $A + B$  aus dem für die Spannung  $A$  erhaltenen Werth, so erhält man wegen der Veränderung der Dimensionen bei  $A + B$  0,20883, welche Zahl von der beobachteten 0,20875 nicht um 0,0004 des ganzen Werthes abweicht.

Die für Eisen angegebenen, aus den dynamischen Bestimmungen folgenden Werthe sind die Mittel aus je 4 unabhängigen Versuchen, welche etwas grössere Abweichungen vom Mittel zeigen, aber nur einmal eine  $\frac{2}{5}$  Proc. erreichende. Der zugefügte Zug betrug  $11,06 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ .

Beim Kupfer zeigte sich die Schwingungsdauer abhängig von der seit einer Spannungsänderung verflossenen Zeit, und zwar mit wachsender Zeit abnehmend, mochte die Spannungsänderung in einer Zu- oder Abnahme der Spannung bestehen. Ueber diesen Punkt setze ich folgende Versuchsreihe hierher.

Die Spannung des Kupferdrahtes wurde am 20. März 12<sup>h</sup> 5' von  $A$  auf  $A + B$  gebracht und die Aenderung der Schwingungsdauer mit der seit der Spannungsänderung verflossenen Zeit  $t$  verfolgt, wobei immer als unendlich klein anzusehende Amplituden benutzt wurden.

Zeit $t$	Temp.	Amplitude	$\tau_2$	$\tau_2$ red. auf $20^\circ$
0 <sup>h</sup> 12'	21,4°	1° 7' bis 0° 39'	9,904"	9,899"
0 <sup>h</sup> 48'	21,8°	1° 35' „ 1° 15'	9,900"	9,894"
4 <sup>h</sup> —	—	—	—	9,881"
23 <sup>h</sup> —	—	—	—	9,872"

Am 21. März wurde das spannende Gewicht fortgenommen und wiederum die Änderung der Schwingungsdauer mit der seit der Spannungsänderung verflossenen Zeit verfolgt. Wegen der durch die Fortnahme des Gewichts hervorgebrachten Änderung des Trägheitsmoments sind die absoluten Werthe der Schwingungsdauern der folgenden Reihe mit den entsprechenden Werthen der vorhergehenden nicht vergleichbar.

Zeit $t$	Temp.	Amplitude	$\tau_2$	$\tau_2$ red. auf $20^\circ$
0 <sup>h</sup> 5'	21,5°	1° 34' bis 0° 52'	8,703"	8,699"
0 <sup>h</sup> 38'	21,7°	1° 1' „ 0° 50'	8,689"	8,684"
18 <sup>h</sup> —	—	—	—	8,678"
24 <sup>h</sup> —	—	—	—	8,671"

Diese Versuche zeigen, dass die Schwingungsdauer mit der seit einer Spannungsänderung verflossenen Zeit abnimmt.

Was hier für die Schwingungsdauer gezeigt ist, haben Pisati<sup>1)</sup> und P. M. Schmidt<sup>2)</sup> für die Dämpfungsconstante bei verschiedenen Metallen gezeigt, auch fand Pisati<sup>3)</sup> die Schwingungsdauer eines Silberdrahtes, nachdem das spannende Gewicht mehrere Tage entfernt und dann wieder angehängt worden, von 2,4245" auf 2,4327" gestiegen. Die Versuche, aus welchen die Werthe der Tabelle 2 hergeleitet sind, wurden jedesmal erst gemacht, wenn die Schwingungsdauer sich mit der Zeit nicht mehr änderte.

§ 4. Nachdem diese Fragen erledigt waren, wandte ich mich zu der Untersuchung der Eigenschaften von Drähten, welche eine permanente Torsion erhalten haben. An das

1) Pisati, Gaz. chim. ital. 6. p. 69—71. 1876.

2) Schmidt, Wied. Ann. 2. p. 66. 1877.

3) Pisati, Gaz. chim. ital. 6. p. 70. 1876.

zu verwendende Material glaubte ich folgende Forderungen stellen zu müssen:

Erstens, dass die Drähte sich selbst überlassen (ungespannt) vollkommen gerade seien.

Zweitens, dass die permanente Torsion über den ganzen Draht hin nahezu dieselbe sei, d. h. dass die permanenten Verdrehungen irgend zweier Querschnitte sich nahezu verhalten wie ihre Abstände vom befestigten Ende.

Die erste Forderung erfüllen Drähte aus Stahl, Eisen, Kupfer, welche in freier Luft oder im Wasserstoffstrom unter schwacher Spannung geglüht worden sind. Um an solchen Drähten die zweite Forderung zu prüfen, wurden an den zu untersuchenden Draht, wie dies zu einem ähnlichen Zwecke in ähnlicher Weise von Boltzmann<sup>1)</sup> und O. E. Meyer<sup>2)</sup> ausgeführt ist, in gemessenen Abständen vom befestigten Ende zwei kleine, leichte, versilberte Glasspiegel mittelst eines Tropfens Leim befestigt und die permanenten Drehungen beobachtet, welche diese Spiegel erlitten, wenn dem Drahte eine permanente Torsion ertheilt wurde. Da es sich nur um eine rohe Schätzung handelte, indem die zweite Forderung bei keinem der untersuchten Drähte genau erfüllt war, so wurde der Draht in der Nähe der Spiegel mitten durch zwei Pappringe von 1 dem Durchmesser hindurchgeführt, um welche innen eine Millimeterscala gelegt war; eine feste Abschlinie war dabei durch den Draht und einen gegenüberliegenden Scalenstrich gegeben, und es wurden die Verdrehungen der Spiegel in Scalentheilen mit blossem Auge abgelesen. Solche Versuche haben nun ergeben, dass bei weichen Kupferdrähten innerhalb weiter Grenzen der permanenten Torsionen dieselben sich nahezu gleichförmig über den ganzen Draht erstrecken. Bei Eisendrähten hingegen, die in der beschriebenen Weise behandelt worden, war dies auch nicht annähernd der Fall, vielmehr betrafen grössere permanente Torsionen gewöhnlich allein eine kleine Stelle des Drahtes. Dass diese Stelle in der Regel

1) Boltzmann, Wien. Ber. **76.** p. 832. 1877.

2) Meyer, Wied. Ann. **4.** p. 258 ff. 1878.

sehr klein sei, davon habe ich mich überzeugt, indem ich in kleinen Abständen an einen solchen Draht Papierstreifen klebte<sup>1)</sup>), welche vor der permanenten Torsion alle in einer Ebene lagen. Nach Eintritt der permanenten Torsion zerfielen diese Streifen gewöhnlich in zwei Theile, weder die oberen noch die unteren waren gegen einander verdreht, sondern nur die oberen gegen die unteren. Entsprechend findet man, wenn man einen nach obiger Vorschrift behandelten Eisendraht in eine Kreisform zu biegen sucht, dass permanente Biegungen in Form eines ziemlich scharfen Knickes eintreten, wobei die übrigen Theile des Drahtes ganz gerade bleiben<sup>2)</sup>), während der permanent gebogene Kupferdraht gleichförmig gekrümmmt erscheint.

Das Verhalten des Stahls lag zwischen dem Verhalten des Eisens und Kupfers.

Nach diesen Erfahrungen habe ich eingehendere Untersuchungen nur an Kupferdrähten vorgenommen.

Der Vorgang, durch welchen ein Draht eine permanente Torsion erhält, kann nun ein doppelter sein:

Erstens kann der Draht, indem die Moleküle desselben bleibend eine andere Anordnung annehmen, wenn er isotrop war, auch isotrop bleiben. In Bezug auf ein solches Verhalten würde der Draht einer Flüssigkeit zu vergleichen sein.

Oder es kann zweitens die permanente Torsion dadurch eintreten, dass die Materie des Drahtes in der Richtung der Hauptdruckachsen nachgibt, wobei auch die kleine Drehung bestehen bleiben mag, welche die Elemente des Drahtes ausser der Compression und Dilatation in zwei zu einander senkrechten Richtungen bei der Torsion erfahren. In dem zuletzt betrachteten Falle würde der Draht durch die Torsion anisotrop geworden sein, und zwar an jeder Stelle sich verhalten wie ein Krystall des rhombischen Systems, dessen Axen gewisse Richtungen haben.

Ich habe eine Erscheinung an permanent tordirten

1) Durch solche Papierstreifen kann, wie beiläufig bemerkt sei, das Wesen der Torsion in Vorlesungen bequem demonstriert werden.

2) Diese Erscheinung habe ich an Eisendrahten bis zu 0,9 mm Durchmesser beobachtet.

Kupferdrähten aufgefunden, welche mit völliger Regelmässigkeit verläuft, welche durch die Annahme, dass durch die permanente Torsion der Draht in der bezeichneten Weise anisotrop geworden sei, vollständig erklärt werden kann, und welche nicht stattfinden könnte, wenn der Draht isotrop geblieben wäre.

Betrachten wir erstens einen Draht, welchem eine gewisse permanente Torsion ertheilt worden ist. Wenn man einen solchen Draht belastet, so entzieht man ihm dadurch, wie Hr. Wiedemann<sup>1)</sup> gezeigt hat, dauernd einen Theil seiner permanenten Torsion; bei einer folgenden Entlastung bleibt nämlich die verkleinerte Torsion bestehen oder verringert sich noch mehr. Wiederholte Belastung und Entlastung wirkt in demselben Sinne mit abnehmender Intensität, und schliesslich gelangt der Draht in einen Zustand, in welchem eine dauernde Aenderung der permanenten Torsion durch Belastung und Entlastung nicht mehr eintritt.

Wenn man den Draht in diesem Zustande belastet, so tordirt er sich und kehrt nach Fortnahme der Belastung in seine alte Lage zurück. Der Sinn dieser temporären Torsion ist derselbe wie der Sinn der permanenten Torsion, welche dem Drahte ertheilt wurde. Es wird ferner diese temporäre Torsion nahe proportional mit der Belastung gefunden, ferner nimmt sie zu mit der permanenten Torsion, welche dem Drahte ertheilt wurde, aber viel langsamer als diese.

Betrachten wir zweitens einen Draht, welcher durch ein auf seinen untern Endquerschnitt wirkendes tordirendes Moment tordirt gehalten wird; durch abwechselndes Belasten und Entlasten nimmt, wie Hr. G. Wiedemann<sup>2)</sup> gezeigt hat, der permanente Theil dieser Torsion zu bis zu einer gewissen Grösse, bei welcher ein weiterer Belastungswechsel keine Aenderung der permanenten Torsion mehr hervorbringt.

Wenn man in diesem Zustande den Draht belastet, so tordirt er sich und kehrt nach Fortnahme

1) Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 485 ff. 1879.

2) l. c.

der Belastung wieder in seine alte Lage zurück. Der Sinn dieser temporären Torsion ist wieder derselbe, wie der Sinn der permanenten Torsion, welche dem Drahte durch das tordirende Moment ertheilt wurde; die genannte temporäre Torsion ist nahe proportional der zugefügten Belastung und wächst mit der ertheilten permanenten Torsion, viel langsamer als diese.

Das Gesagte bezieht sich auf nach der gegebenen Vorschrift behandelte Kupferdrähte; ein im natürlichen Zustande nicht ganz gerader Eisendraht, bei welchem aber die permanente Torsion sich nahe gleichmässig über den Draht erstreckte, zeigte qualitativ dasselbe Verhalten. An den von ihm untersuchten Messingdrähten hat Hr. G. Wiedemann diese Erscheinungen nicht beobachtet.

Um bei diesen Versuchen die Spannung anzubringen, versah ich die Schraubenspindeln, deren Spitzen den Ring  $\delta$  hielten, mit Muttern, die nach unten zu kehrende Haken  $\eta$ ,  $\eta$  trugen. An diese wurden die Enden eines um eine 8 cm breite Rolle geschlungenen Fadens geknüpft (s. Taf. I Fig. 5); an die Scheere dieser Rolle war ein Haken angebracht, an den eine Wagschale gehängt werden konnte; um dabei Stösse möglichst zu vermeiden, war über den Haken ein Stück Kautschukschlauch geschoben. Das Arretiren der Wagschale geschah mittelst eines langen Hebels, welcher vom Sitze des Beobachters aus gehandhabt wurde. Hr. G. Wiedemann<sup>1)</sup>, dessen Arbeit über die Torsion ich nach Beendigung meiner Untersuchung erhielt, hat eine bessere Art der Belastung angewandt; indessen fand ich auch mein Verfahren dem von mir verfolgten Zwecke entsprechend.

Wenn der Angriffspunkt der Resultante der von beiden Fäden ausgeübten Züge in den Endpunkt des verticalen Drahtes fällt, so wird beim Belasten keine Verlegung des am Drahte aufgehängten Körpers  $K_2$  eintreten. Der genannte Angriffspunkt konnte nun durch Verstellen der Walze  $\gamma$  und des Ringes  $\delta$  an den bezeichneten Ort gebracht

1) L. e. p. 496.

werden. Um beurtheilen zu können, ob eine Verlegung von  $K_2$ , und in welchem Sinne diese eintrat, brachte ich an den Fortsatz des Ringes  $R$  ungefähr senkrecht zueinander zwei Spiegel an (in der Figur nicht gezeichnet), deren Drehung ich durch Scala und Fernrohr beobachtete; es wurde so lange an den Schrauben regulirt, bis eine Verlegung nicht mehr eintrat; übrigens wurden durch kleine Verlegungen von  $K_2$  die Resultate nicht merklich beeinflusst. Da es sich bei der vorzunehmenden Untersuchung weniger um äusserste Präcision als um Anstellung vieler Versuche handelte, so wurde die Oeldämpfung angewandt und dazu in der Klemme  $c$  des Ringes  $R$  ein passend gebogener Draht befestigt, welcher ein in das ringförmige Oelgefäß tauchendes Blech trug.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass, solange bei kleinen permanenten Torsionen die Wirkung der Belastung klein war, dem Apparat eine empfindliche Stellung gegeben wurde, d. h. Drehungen  $\Theta$  angewandt wurden gleich oder grösser als  $90^\circ$ .

Die folgende Tabelle enthält einen Theil der diesen Gegenstand betreffenden Versuche.  $p$  bedeutet die permanente Torsion des Drahtes,  $t$  die durch den angewandten Zug erzielte temporäre Torsion. Wo das tordirende Moment auf den Draht noch einwirkt, ist  $\vartheta$  die durch dasselbe hervorgebrachte temporäre Torsion gerechnet von der permanenten Torsionsgleichgewichtslage aus. Da die Grösse von  $\vartheta$  zu  $t$  in keiner wesentlichen Beziehung steht, so ist unter II. 1 und III. 1  $\vartheta$  nicht mit Genauigkeit bestimmt worden; unter II. 1 ist  $\vartheta$  ungefähr bezüglich  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $173^\circ$ ,  $173^\circ$ , unter III. 1 jedesmal ungefähr  $173^\circ$ . Der Durchmesser der Drähte ist 0,427 mm; der zugefügte Zug unter I. und II. immer 3,22 kg auf das Quadratmillimeter; die Länge der Drähte betrug 530 mm.

### I. Kupferdraht in der Luft geglüht.

1) Der Draht steht unter der Wirkung des tordirenden Moments, welches die permanente Torsion hervorgebracht hat.

$\theta$	$p$	$t$	$\frac{D_2}{D_1}$
45°	2,2°	0,14°	1,264
90°	17,2°	0,35°	0,669
173°	402,8°	1,6°	0,342

2) Auf den Draht wirkt kein tordirendes Moment:

$$p = 15,8^\circ, \quad 398,1^\circ, \\ t = 0,1^\circ, \quad 1,1^\circ.$$

## II. Kupferdraht im Wasserstoffstrom geglüht.

1) Das tordirende Moment wirkt ein:

$$p = 13,5^\circ, \quad 68,9^\circ, \quad 266,5^\circ, \quad 749,5^\circ, \\ t = 0,19^\circ, \quad 0,58^\circ, \quad 1,14^\circ, \quad 1,68^\circ.$$

2) Auf den Draht wirkt kein tordirendes Moment:

$$p = 10,6^\circ, \quad 67,4^\circ, \quad 259,3^\circ, \quad 716,5^\circ, \\ t = 0,09^\circ, \quad 0,53^\circ, \quad 0,82^\circ, \quad 1,23^\circ.$$

## III. Kupferdraht im Wasserstoffstrom geglüht.

1) Das tordirende Moment wirkt ein:

Zugefügter Zug in $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	$p$	$t$	berechnet nach der Annahme, dass $t$ prop. dem zugefügten Zug
3,22	643°	1,48°	—
1,83	643°	0,78°	0,84°

2) Auf den Draht wirkt kein tordirendes Moment:

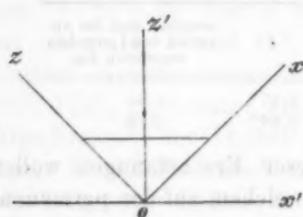
Zugefügter Zug in $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	$p$	$t$	berechnet nach der Annahme, dass $t$ prop. dem zugefügten Zug
3,22	636°	1,17°	—
1,83	636°	0,68°	0,66°

§ 5. Bei der Erklärung dieser Erscheinungen wollen wir den Fall ins Auge fassen, in welchem auf den permanent tordirten Draht ein tordirendes Moment nicht wirkt; die Erklärung des andern Falls wird dieselbe sein.

Die permanente Torsion stelle ich mir ganz oder zum Theil so vor, dass die Materie in der Richtung der Hauptdruckachsen nachgegeben hat. In jedem Punkt des Drahtes liegt die eine der Hauptdruckachsen im Querschnitt in der

Richtung des Radius vector, und nach dieser Richtung findet weder Compression noch Dilatation statt; die beiden andern Hauptdruckaxen liegen in einer Ebene senkrecht zum Radius vector unter  $45^\circ$  gegen die Drahtaxe geneigt, und nach der einen findet Compression, nach der andern Dilatation statt. Durch die permanente Torsion ist demnach der Draht in einen anisotropen Körper verwandelt worden und zwar verhält er sich in jedem Punkte wie ein Krystall des rhombischen Systems, aber an den verschiedenen Punkten haben die Axen verschiedene Richtung, und es wird ferner der Grad der Anisotropie von der Drahtaxe nach aussen zu wachsen, da in derselben Richtung die Verzerrungen der Elemente wachsen.

Es entsteht die Aufgabe, die Deformationen zu bestimmen, welche ein longitudinaler Zug in einem solchen Draht hervorbringt. Weil indessen nicht bekannt ist, wie der Grad der Anisotropie sich von der Axe des Drahtes nach der Peripherie hin ändert, so habe ich vorgezogen, eine einfachere Aufgabe zu behandeln, von der man sagen kann, dass sie ein Volumelement des Drahtes betreffe. Versetzen wir uns nämlich in einen Punkt des Drahtes und stellen uns dort ein parallelepipedisches Volumelement vor, dessen erste Kanten  $a$  die Richtung des Radius vector haben, dessen zweite Kanten  $b$  im Querschnitt senkrecht zum Radius vector sind und dessen dritte Kanten  $c$  der Axe des Drahtes parallel laufen.



Die Verzerrung, welche dieses Element bei der Torsion erleidet, besteht darin, dass es einer Schiebung<sup>1)</sup> unterworfen wird, indem die beiden Flächen  $ab$  Verschiebungen in der Richtung  $b$  von verschiedener Grösse erleiden. Durch die permanente Deformation ist das Volumelement dreiaxig (rhombisch) anisotrop geworden, und zwar liegen die Axen in der Richtung  $a$  ( $oy$ ) und in der Ebene  $bc$  unter  $45^\circ$  gegen  $c$  und  $b$  ge-

1) Thomson u. Tait, deutsche Uebers. 1. p. 118 ff.

neigt ( $ox$  und  $oz$ ). Es entsteht die Aufgabe, die Deformation zu finden, welche ein longitudinaler Zug  $K$  in der Richtung  $c$  ( $oz'$ ) in diesem Element oder einem ihm ähnlichen Block von endlicher Grösse hervorbringt.

Diese Aufgabe löst man leicht durch die Formeln, welche für einen rhombischen, nicht hemimorphen Krystall die Spannungscomponenten ( $X_x$  etc.) mit den Deformationscomponenten ( $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \chi, \psi$  in der Bezeichnung von Clebsch) verknüpfen. Diesen Formeln kann man folgende Gestalt geben:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 \cdot \alpha = -X_x + \mu_{12} \cdot Y_y + \mu_{13} \cdot Z_z \\ E_2 \cdot \beta = \mu_{21} \cdot X_x - Y_y + \mu_{23} \cdot Z_z \\ E_3 \cdot \gamma = \mu_{31} \cdot X_x + \mu_{32} \cdot Y_y - Z_z \\ \sigma_1 \cdot \varphi = Y_z \sigma_2 \cdot \chi = Z_z \sigma_3 \cdot \psi = X_y \end{array} \right.$$

Zwischen den 9 Coëfficienten  $\mu_{ik}$  und  $E_i$  finden folgende Beziehungen statt:

$$(4) \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}, \quad \frac{E_3}{E_2} = \frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}, \quad \frac{E_1}{E_3} = \frac{\mu_{13}}{\mu_{31}},$$

sodass nur 6 dieser Coëfficienten unabhängig voneinander sind; diese Beziehungen drücken die Bedingungen dafür aus, dass die elastischen Kräfte ein Potential haben. Die in den Formeln (3) auftretenden Coëfficienten haben sämmtlich eine einfache experimentelle Bedeutung. Unterwirft man z. B. die Endflächen eines Prismas, dessen Axe parallel der  $x$ -Axe ist, einem Zug in der Richtung der  $x$ -Axe, so ist  $E_1 = \frac{\text{Zug}}{\text{Längsdilatation}}$ ;  $\mu_{12}$  und  $\mu_{13}$  sind bezüglich die Verhältnisse der Quercontraction in der Richtung der  $y$ - und  $z$ -Axe zur Längsdilatation in der Richtung der  $x$ -Axe.

Durch Anwendung der Formeln (3) auf die vorliegende Aufgabe findet man nun leicht, dass durch den longitudinalen Zug  $K$  ausser der Dilatation in der Richtung des Zuges und den Contractionen in Richtungen senkrecht zum Zug, eine Schiebung eintritt, indem die Ebenen  $ab$  übereinander hingleiten, und diese Schiebung hat den Werth:

$$(4) \quad \chi' = \frac{K}{2} \cdot \frac{E_2 - E_1}{E_1 \cdot E_3},$$

wo  $E_1$  und  $E_3$  zwei Constanten sind, welche man die Elastitätscöoefficienten in Bezug auf die Richtungen  $ox$  und  $oz$

nennen kann. Dass die Schiebung prop.  $K$  sei, wird durch die Versuche bestätigt.

Diese lehren weiter, dass wenn die Schiebung, durch welche der Block anisotrop wurde, die Richtung des Pfeils hat, dann die durch den Zug  $K$  eintretende dieselbe Richtung hat; hieraus kann man schliessen, dass  $E_3 > E_1$  oder dass der Elasticitätscoefficient für die Richtung, in welcher die permanente Dehnung stattgefunden hat, kleiner ist, als für die Richtung, in welcher die permanente Compression eingetreten ist.

### III. Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit; von G. Kirchhoff.

(Aus dem Monatsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 15. Mai 1879.)

Unter den wenigen Flüssigkeitsbewegungen, für welche man die Differentialgleichungen bisher hat integrieren können, nehmen eine wesentliche Stelle die unendlich kleinen Schwingungen ein, die eine schwere, nicht reibende, incompressible Flüssigkeit in einem verticalen, cylindrischen oder prismatischen Gefäss mit horizontalem Boden ausführen kann. Die Schwingungen einer solchen Flüssigkeit in einem Gefäss, dessen Boden nicht horizontal ist, sind meines Wissens bis jetzt nicht behandelt. Es sollen im Folgenden einige hierher gehörige Fälle, und zwar Fälle, in denen der Boden aus einer schiefen Ebene oder aus zwei schiefen Ebenen gebildet ist, erörtert werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Bewegung nur von einer horizontalen Ordinate abhängt, die Flüssigkeit also in einer Richtung durch zwei parallele, verticale Wände begrenzt ist.

Es sei  $x$  die horizontale Ordinate eines Punktes, die diesen Wänden parallel ist,  $z$  die verticale Ordinate und  $\varphi$  das Geschwindigkeitspotential in diesem Punkte zur Zeit  $t$ ; dann ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

oder:

$$(1) \quad \varphi = F(z + ix) + G(z - ix),$$

wo  $i = \sqrt{-1}$  ist, und  $F$  und  $G$  Functionszeichen sind. Die Functionen  $F$  und  $G$  müssen conjugirt sein, da  $\varphi$  reell ist. Die freie Oberfläche der Flüssigkeit weiche unendlich wenig von der Ebene  $z = 0$  ab, die positive  $z$ -Axe sei abwärts gekehrt, und  $g$  bezeichne die Beschleunigung eines frei fallenden Körpers, dann ist für  $z = 0$ :

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

und  $\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  ist die Tiefe eines Punktes der freien Oberfläche unter einer festen horizontalen Ebene.

Nun werde vorausgesetzt, dass  $\varphi$  gleich:

$$\sin nt\pi,$$

multiplicirt mit einem von  $t$  unabhängigen Factor ist, wo bei  $n$  die Zahl der einfachen Schwingungen bedeutet, die jedes Flüssigkeitstheilchen in der Zeiteinheit ausführt. Es ist dann:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -n^2 \pi^2 \varphi,$$

also für  $z = 0$ :

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -a \varphi, \quad \text{wo } a = \frac{n^2 \pi^2}{g}.$$

Setzt man hier den Werth von  $\varphi$  aus der Gleichung (1) ein und bezeichnet durch  $F'$  und  $G'$  die Differentialquotienten von  $F$  und  $G$  nach ihren Argumenten, so erhält man:

$$F'(ix) + G'(-ix) = -a(F(ix) + G(-ix)).$$

Diese Gleichung braucht nur für reelle Werthe  $x$  erfüllt zu werden, und zwar für solche, die Punkten der freien Flüssigkeitsoberfläche entsprechen; das kann aber nur geschehen, wenn sie auch für jeden complexen Werth von  $x$  erfüllt wird. Bezeichnet daher  $u$  eine complexe Variable, so muss allgemein:

$$F'(u) + G'(-u) = -a(F(u) + G(-u))$$

oder auch:

$$(3) \quad \frac{d}{du} (F(u) - G(-u)) = -a(F(u) + G(-u))$$

sein.

Es ist nun noch die Bedingung aufzustellen, der an der nicht freien Flüssigkeitsoberfläche, abgesehen von den der

$zz$ -Ebene parallelen Wänden, zu genügen ist. Diese Bedingung ist die, dass diese Oberfläche die Flächen:

$$\varphi = \text{const.}$$

senkrecht schneidet, dass also für jeden zusammenhängenden Theil derselben:

$$F(z + ix) - G(z - ix) = \text{const.}$$

ist. Es soll angenommen werden, dass die ganze nicht freie Oberfläche zusammenhängend ist; der Werth der zuletzt eingeführten Constanten kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit beliebig gewählt, die Bedingung also dahin ausgesprochen werden, dass für die nicht freie Oberfläche:

$$(4) \quad F(z + ix) - G(z - ix) = 0 \quad \text{ist.}$$

Die nicht freie Oberfläche sei nun die Ebene:

$$\frac{z}{x} = \tan \alpha$$

oder wenn man:  $x = \rho \cos \vartheta$ ,  $z = \rho \sin \vartheta$

setzt, die Ebene:  $\vartheta = \alpha$ ,

und die Flüssigkeit befindet sich auf der Seite dieser Ebene, nach der die positive  $x$ -Axe gekehrt ist, d. h. sie erfülle den Raum, für den:  $\vartheta < \alpha$

ist. Die Gleichung (4) wird dann:

$$F(\rho i e^{-i\alpha}) - G(-\rho i e^{+i\alpha}) = 0.$$

Diese Gleichung, die zunächst nur für positive reelle Werthe von  $\rho$  erfüllt zu werden braucht, muss eben deswegen auch für complexe gelten; bezeichnet  $u$  wiederum eine complexe Variable, und setzt man:  $e^{-i2\alpha} = \beta$ , so hat man daher:

$$(5) \quad G(u) = F(-\beta u),$$

und infolge der Gleichung (3):

$$(6) \quad \frac{d}{du} (F(u) - F(\beta u)) = -a(F(u) + F(\beta u)).$$

Es sei  $\alpha$  mit  $\pi$  commensurabel und:

$$\alpha = \frac{m}{n} \pi,$$

wo  $m$  und  $n$  zwei ganze Zahlen sind, die keinen gemeinsamen Factor haben, also:

$$\beta = e^{-i \frac{2m\pi}{n}}.$$

Es ist dann  $\beta$  eine primitive  $n$ te Wurzel der Einheit, und unter einer sogleich abzuleitenden Bedingung lässt sich der Gleichung (6) genügen durch:

(7)  $F(u) = A_0 e^{\lambda a u} + A_1 e^{\beta \lambda a u} + A_2 e^{\beta^2 \lambda a u} + \dots + A_{n-1} e^{\beta^{n-1} \lambda a u}$ ,  
wo  $\lambda$  eine willkürliche Constante ist,  $A_0, A_1, \dots$  Constanten sind, deren Verhältnisse auf passende Weise bestimmt werden müssen. Setzt man nämlich diesen Ausdruck von  $F$  in die Gleichung (6), so erhält man die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\lambda(A_0 - A_{n-1}) = -(A_0 + A_{n-1}),$$

$$\beta\lambda(A_1 - A_0) = -(A_1 + A_0),$$

$$\beta^2\lambda(A_2 - A_1) = -(A_2 + A_1)$$

$$\dots \dots \dots \beta^{n-1}\lambda(A_{n-1} - A_{n-2}) = -(A_{n-1} + A_{n-2})$$

oder:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0(\lambda + 1) = A_{n-1}(\lambda - 1), \\ A_1(\beta\lambda + 1) = A_0(\beta\lambda - 1), \\ A_2(\beta^2\lambda + 1) = A_1(\beta^2\lambda - 1) \\ \dots \dots \dots \\ A_{n-1}(\beta^{n-1}\lambda + 1) = A_{n-2}(\beta^{n-1}\lambda - 1). \end{array} \right.$$

Multiplicirt man sie mit einander, so erhält man:

$$\lambda^n - (-1)^n = \lambda^n - 1,$$

da:  $1, \beta, \beta^2, \dots \beta^{n-1}$

die Wurzeln der Gleichung:

$$\lambda^n - 1 = 0$$

sind. Es folgt daraus, dass, wenn  $n$  ungerade ist, die Gleichungen (8) nicht bestehen können, ohne dass alle  $A$  verschwinden; wenn  $n$  gerade ist, aber diese Gleichungen bei einem beliebigen Werthe von  $\lambda$  und einem beliebigen Werthe einer der Grössen  $A$  erfüllt werden können. Demgemäss soll  $n$  als gerade angenommen werden.

Die Hälfte der Glieder des in (7) für  $F$  aufgestellten Ausdrucks verschwindet, wenn man  $\lambda$  einer ganzen Potenz von  $\beta$  gleichsetzt. Wählt man eine andere ganze Potenz, so erhält man einen nur scheinbar verschiedenen Ausdruck für  $F$ . Man mache:

$$\lambda = \beta^{\frac{n}{2}} = -1;$$

es verschwinden dann die  $A$ , deren Index  $\frac{n}{2}$  oder grösser als  $\frac{n}{2}$  ist,  $A_0$  kann beliebig gewählt werden und es ist:

$$A_1 = A_0 \frac{\beta + 1}{\beta - 1}, \quad A_2 = A_1 \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1} \cdots \quad A_{\frac{n}{2}-1} = A_{\frac{n}{2}-2} \frac{\beta^{\frac{n}{2}-1} + 1}{\beta^{\frac{n}{2}-2} - 1}$$

und:

$$F(u) = A_0 e^{-au} + A_1 e^{-\beta au} + \cdots + A_{\frac{n}{2}-1} e^{-\beta^{\frac{n}{2}-1} au}.$$

Statt der Constanten  $A$  mögen hier Constanten  $B$  durch die Gleichungen:

$$A_0 = B_0 e^{-i\pi \frac{n-2}{8}}, \quad A_2 = B_2 e^{-i\pi \frac{n-10}{8}},$$

$$A_1 = B_1 e^{-i\pi \frac{n-6}{8}}, \quad A_{\frac{n}{2}-1} = B_{\frac{n}{2}-1} e^{i\pi \frac{n-2}{8}}$$

eingeführt werden; man hat dann:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(u) = B_0 e^{-au - i\pi \frac{n-2}{8}} + B_1 e^{-\beta au - i\pi \frac{n-6}{8}} \\ \quad + B_2 e^{-\beta^2 au - i\pi \frac{n-10}{8}} + \cdots + B_{\frac{n}{2}-1} e^{-\beta^{\frac{n}{2}-1} au + i\pi \frac{n-2}{8}}, \end{array} \right.$$

es ist  $B_0$  willkürlich und:

$$B_1 = B_0 \operatorname{ctg} \alpha, \quad B_2 = B_0 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

$$B_3 = B_0 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha \cdots B_{\frac{n}{2}-1} = B_0 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \cdots \operatorname{ctg} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \alpha;$$

woraus folgt:

$$B_0 = \pm B_{\frac{n}{2}-1}, \quad B_1 = \pm B_{\frac{n}{2}-2}, \quad B_2 = \pm B_{\frac{n}{2}-3}, \quad \dots$$

wo die Zeichen — gelten, wenn  $\frac{n}{2}$  und zugleich  $\frac{n+1}{2}$  gerade ist, während in allen anderen Fällen die Zeichen + zu nehmen sind. Bildet man nach (5) und (9) den Ausdruck von  $G(v)$  und kehrt die Reihenfolge der Glieder um, so erhält man hiernach:

$$\pm G(v) = B_0 e^{-av + i\pi \frac{n-2}{8}} + B_1 e^{-a \frac{v}{\beta} + i\pi \frac{n-6}{8}} \\ + B_2 e^{-a \frac{v}{\beta^2} + i\pi \frac{n-10}{8}} + \cdots + B_{\frac{n}{2}-1} e^{-a \frac{v}{\beta^{\frac{n}{2}-1}} - i\pi \frac{n-2}{8}},$$

w<sup>o</sup> über das Doppelzeichen nach derselben Regel zu entscheiden ist. Nach (1) ist:

$$\varphi = F(u) + G(v),$$

wenn:

$$u = z + ix, \quad v = z - ix$$

gesetzt wird, und  $F(u)$  und  $G(v)$  sind conjugirt. Die Exponenten in den entsprechenden Gliedern der für diese Functionen aufgestellten Ausdrücke sind conjugirt; daraus folgt, dass  $B_0$  reell sein muss, wenn nicht  $\frac{n}{2}$  und  $\frac{m+1}{2}$  gerade sind, rein imaginär, wenn diese beiden Zahlen gerade sind. In beiden Fällen ist  $\varphi$  gleich dem Doppelten des reellen Theiles des in (9) für  $F(u)$  aufgestellten Ausdrucks.

Führt man statt  $x$  und  $z$  wieder die Polarcoordinaten  $\varrho$  und  $\vartheta$  ein, so hat man:

$$u = \varrho (\sin \vartheta + i \cos \vartheta), \quad \beta u = \varrho (\sin (2\alpha + \vartheta) + i \cos (2\alpha + \vartheta)),$$

$$\beta^2 u = \varrho (\sin (4\alpha + \vartheta) + i \cos (4\alpha + \vartheta)) \dots$$

$$\beta^{\frac{n}{2}-1} u = \varrho (\sin ((n-2)\alpha + \vartheta) + i \cos ((n-2)\alpha + \vartheta)).$$

Man ersieht hieraus, dass im allgemeinen bei den hier aufgestellten Formeln  $\varphi$  unendlich wird innerhalb des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes, in dem  $\varrho$  von 0 bis unendlich,  $\vartheta$  von 0 bis  $\alpha$  variiert; nur, wenn:

$$m = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{n}$$

ist, findet dieses nicht statt, und für  $\varrho = \infty$  wird, wenn man  $2 B_0 = 1$  macht,

$$2 F(z + ix) = e^{-az - i\left(ax + \pi \frac{n-2}{8}\right)}, \quad \varphi = e^{-az} \cos \left(ax + \pi \frac{n-2}{8}\right).$$

Bei beliebigen Werthen von  $x$  und  $z$  hat man dann

für  $n = 2$ :

$$2 F(z + ix) = e^{-a(z+ix)}, \quad \varphi = e^{-az} \cos ax;$$

für  $n = 4$ :

$$2 F(z + ix) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{-az - iax} + \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-az + iax},$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-az} (\cos ax - \sin ax) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-az} (\cos ax + \sin ax);$$

für  $n = 6$ :

$$2F(z+ix) = -ie^{-a(z+ix)} + \sqrt{3}e^{-\frac{a}{2}(z+x\sqrt{3})+i\frac{a}{2}(z\sqrt{3}-x)} \\ + ie^{\frac{a}{2}(z-x\sqrt{3})+i\frac{a}{2}(z\sqrt{3}+x)},$$

$$\varphi = -e^{-az} \sin ax + \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{a}{2}(z+x\sqrt{3})} \cos \frac{a}{2}(z\sqrt{3}-x) \\ - e^{\frac{a}{2}(z-x\sqrt{3})} \sin \frac{a}{2}(z\sqrt{3}+x).$$

Nimmt man in der Gleichung (7)  $\lambda$  unendlich klein an und entwickelt die Exponentialgrößen nach Potenzen der Exponenten, so erhält man für  $F(u)$  eine ganze rationale Function von  $u$ . Die allgemeinste Function dieser Art, die der Gleichung (6) genügt, findet man, indem man in diese Gleichung:

$$F(u) = A_h u^h + A_{h+1} u^{h+1} + \dots + A_{h'} u^{h'}$$

setzt, wo  $h$  und  $h'$  ganze Zahlen bedeuten, und  $h' > h$  ist. Es ergibt sich dann:

$$1 - \beta^h = 0, \quad 1 + \beta^{h'} = 0, \quad A_k = -a A_{k-1} \frac{1}{k} \frac{1 + \beta^{k-1}}{1 - \beta^k},$$

wo  $k$  jede der Zahlen  $h+1, h+2, \dots, h'$  sein kann, während  $A_h$  willkürlich bleibt. Man kann diesen Bedingungen genügen, indem man  $h=0$  oder einem Vielfachen von  $n$  und:

$$h' = h + \frac{n}{2}$$

setzt.

Ein besonderes Interesse hat der Fall, dass die auf diese Weise gebildete Function  $F(u)$  vom zweiten Grade ist; das findet statt, wenn  $n=4$  ist und  $h=0$  gewählt wird. Es sei:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \text{also } \beta = -i;$$

dann hat man:

$$F(u) = A_0 \left( 1 - au(1-i) - \frac{a^3 u^3}{2} i \right),$$

woraus nach (5) folgt:

$$G(v) = A_0 \left( 1 - av(1+i) + \frac{a^3 v^3}{2} i \right).$$

Da  $F(u)$  und  $G(v)$  conjugirt sind, so muss hiernach  $A_0$  reell sein. Setzt man  $A_0 = \frac{1}{2}$ , so erhält man:

$$\varphi = 1 - a(z + x) + a^2 zx,$$

und als Gleichung der Stromlinien, d. h. der Linien, welche die Linien  $\varphi = \text{const.}$  senkrecht schneiden:

$$\text{const.} = a(z - x) - \frac{a^2}{2}(z^2 - x^2).$$

Zu diesen Linien gehört auch die Gerade  $z - x = 0$ ; für sie ist die mit const. bezeichnete Grösse = 0; eine zweite Gerade muss zu derselben Stromlinie gehören; sie ist die Gerade:

$$z + x = \frac{2}{a},$$

die die erste in dem Punkte  $z = x = \frac{1}{a}$  schneidet. Die gedachte Bewegung kann daher auch bestehen, wenn die Flüssigkeit ausser durch die Wand  $z = x$  noch durch die Wand  $z + x = \frac{2}{a}$  begrenzt ist, wenn sie also in einem prismatischen Gefässen sich befindet, dessen Kante nach unten gekehrt, dessen Winkel ein rechter ist, und dessen Seitenflächen gegen die Verticale gleich geneigt sind;  $\frac{1}{a}$  ist die grösste Tiefe der Flüssigkeit.

Für  $z = 0$  (wie für jeden constanten Werth von  $z$ ) wird  $\varphi$  eine lineare Function von  $x$ ; daraus folgt, dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit bei der Bewegung stets eine Ebene bleibt. Die Dauer einer einfachen Schwingung ist der Gleichung (2) zufolge:

$$= \frac{\pi}{Vag},$$

d. h. gleich der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, dessen Länge der grössten Tiefe der Flüssigkeit gleich ist. Die Flüssigkeitstheilchen bewegen sich in den gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten die Gefässwände bilden.

Die beschriebene Bewegung ist eine von unendlich vielen Schwingungsarten, die eine Flüssigkeit in einem Gefässen der bezeichneten Art ausführen kann. Auch die anderen schnelleren Schwingungen lassen sich theoretisch verfolgen. Man kommt auf sie, wenn man die Constanten  $\lambda$  und  $a$  in dem

für  $F(u)$  in der Gleichung (7) aufgestellten Ausdruck so zu bestimmen sucht, dass für  $z+x=2c$  (wo  $c$  die grösste Tiefe der Flüssigkeit bedeutet:

$$F(z+ix) - G(z-ix) = 0$$

ist. Nach der Gleichung (5), in der für  $\beta$  sein Werth  $-i$  zu setzen ist, wird diese Bedingung:

$$F(u) = F(-u + 2c(1+i)).$$

Die Gleichung (7) ist hier:

$$(10) \quad F(u) = A_0 e^{\lambda a u} + A_1 e^{-i\lambda a u} + A_2 e^{-\lambda a u} + A_3 e^{i\lambda a u},$$

und zwischen den Constanten  $A$  hat man die Gleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} A_1(-i\lambda + 1) = A_0(-i\lambda - 1), \\ A_2(-\lambda + 1) = A_1(-\lambda - 1), \\ A_3(i\lambda + 1) = A_2(i\lambda - 1), \end{cases}$$

die neue, eben abgeleitete Bedingung gibt zwei Gleichungen, nämlich:

$$A_2 = A_0 e^{\lambda a 2c(1+i)} \quad \text{und} \quad A_3 = A_1 e^{\lambda a 2c(1-i)}.$$

Diese fünf Gleichungen reichen gerade aus zur Bestimmung der fünf Grössen  $A_1, A_2, A_3, \lambda, a$ . Durch Elimination der drei ersten erhält man:

$$e^{\lambda a 2c(1+i)} = \frac{(1+i\lambda)(1+i\lambda)}{(1-\lambda)(1-i\lambda)}, \quad e^{\lambda a 2c(1-i)} = \frac{(1+\lambda)(1-i\lambda)}{(1-\lambda)(1+i\lambda)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen einmal, dividirt sie das andere mal und zieht jedesmal die Quadratwurzel, so sieht man, dass entweder:

$$e^{2\lambda a c} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \quad \text{und} \quad e^{i2\lambda a c} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

oder:

$$e^{2\lambda a c} = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \quad \text{und} \quad e^{i2\lambda a c} = -\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

sein muss. Man setze:

$$\lambda a c = p,$$

so hat man im ersten Falle die Gleichungen:

$$e^{2p} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \quad e^{i2p} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

oder:

$$\lambda = \operatorname{tg} p, \quad e^{2p} = \operatorname{tg} \left( p + \frac{\pi}{4} \right),$$

im zweiten:

$$e^{2p} = -\frac{1+i}{1-i}, \quad e^{i2p} = -\frac{1+ii}{1-ii}$$

oder:  $\lambda = -\operatorname{ctg} p$ ,  $e^{2p} = \operatorname{ctg}\left(p + \frac{\pi}{4}\right)$ .

Die beiden transzendenten Gleichungen, deren einer  $p$  genügen muss, lassen sich in die eine:

$$\cos 2p \frac{e^{2p} + e^{-2p}}{2} = 1$$

zusammenfassen, welches die Gleichung ist, die die Schwingungszahlen eines elastischen, an beiden Enden freien Stabes bestimmt. Die Wurzeln derselben sind bekannt; aus diesen Wurzeln findet man hier die Schwingungszahlen der Flüssigkeitsmasse, nämlich die Werthe der Grösse  $a$  (die den Quadraten der Schwingungszahlen proportional sind) im ersten der beiden unterschiedenen Fällen durch die Gleichung:

$$ac = \frac{p}{\operatorname{tg} p},$$

im zweiten durch die Gleichung:

$$ac = -p \operatorname{tg} p.$$

Die Gleichung  $e^{2p} = \operatorname{tg}\left(p + \frac{\pi}{4}\right)$  hat zunächst die dreifache Wurzel  $p = 0$ ; bei dem Probleme des elastischen, schwingenden Stabes hat dieselbe keine Bedeutung, da sie dort einer unendlich grossen Schwingungsdauer entspricht; anders ist es hier, für  $p = 0$  wird hier:

$$ac = 1;$$

der hierdurch bestimmte Werth von  $a$  bezieht sich auf die vorher erörterten Schwingungen, bei denen die Oberfläche der Flüssigkeit stets eben bleibt. Die folgenden Wurzeln der genannten Gleichung für  $p$  sind etwas kleiner als:

$$\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \dots$$

Die Genauigkeit dieser Näherungswerte ist um so grösser, je grösser ihre Ordnungszahl; schon bei dem ersten ist sie bedeutend, es ist nämlich:

$$\frac{5\pi}{4} = 3,92699,$$

während der entsprechende Werth von  $p$ :  
 $= 3,92660$  ist.

Die Gleichung  $e^{2p} = \operatorname{ctg} \left( p + \frac{\pi}{4} \right)$  hat die einfache Wurzel  $p = 0$ , die aber einer unendlichen Schwingungsdauer entspricht; ihre folgenden Wurzeln sind etwas grösser als:

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \dots$$

Die erste von ihnen ist genauer 2,36502,

während:  $\frac{3\pi}{4} = 2,35620$  ist.

Nennt man die Schwingungsart, bei der die Oberfläche der Flüssigkeit eine Ebene bleibt, die erste, und setzt ihre Schwingungszahl = 1, so sind hiernach die Schwingungszahlen der Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl:

$$1, 1,9824, 2,6586, 3,1953,$$

und die der Schwingungsarten gerader Ordnungszahl:

$$1,5243, 2,3448, 2,9393.$$

Neben der Schwingungszahl sind für jede der möglichen Schwingungsarten von Interesse gewisse ausgezeichnete Punkte der Oberfläche, die Knoten nämlich, d. h. die Punkte, in denen die verticale Bewegung Null ist, und die Bäuche, in denen die verticale Bewegung ein Maximum ist, die Tangente an die Oberfläche also horizontal bleibt. Um diese zu finden, muss der Ausdruck von  $\varphi$  aufgestellt werden.

Für die Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl sind die Gleichungen (11):

$$A_1 = -e^{i2p} A_0, \quad A_2 = -e^{2p} A_1, \quad A_3 = -e^{-i2p} A_2,$$

nach (10) ist also, wenn man über die willkürliche Constante  $A_0$  auf gewisse Weise verfügt:

$$2iF(u) = e^{p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} - e^{-i p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} \\ + e^{-p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} - e^{i p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)},$$

oder kürzer:

$$iF(u) = \cos p\left(\frac{u}{c}i + 1 - i\right) - \cos p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right),$$

und nach (5):

$$iG(v) = -\cos p \left( \frac{vi}{c} - 1 - i \right) + \cos p \left( \frac{vi}{c} - 1 + i \right).$$

Um  $i\varphi$  zu erhalten, hat man diese beiden Gleichungen zu addiren und  $u = z + ix$ ,  $v = z - ix$  zu setzen. Man braucht  $\varphi$  nur für die Oberfläche kennen zu lernen, man kann also  $z = 0$  setzen; überdies möge:

$$\frac{x}{c} = 1 - \xi$$

gemacht werden; es ergibt sich dann:

$$i\varphi = \cos p(\xi - i) - \cos p(1 + i\xi) - \cos p(\xi + i) + \cos p(1 - i\xi)$$

oder:  $\varphi = (e^p - e^{-p}) \sin p\xi + \sin p(e^{p\xi} - e^{-p\xi})$ .

Nach der transzendenten Gleichung, der  $p$  genügt, ist:

$$\frac{e^p - e^{-p}}{2} = \frac{\sin p}{V \cos 2p},$$

wo das Vorzeichen der Quadratwurzel mit dem Vorzeichen von  $\sin p$  übereinstimmen muss; abgesehen von einem constanten Factor hat man daher auch:

$$\varphi = \sin p\xi + V \cos 2p \frac{e^{p\xi} - e^{-p\xi}}{2}.$$

In den Knoten ist  $\varphi = 0$ , in den Bäuchen  $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$ , d. h.:

$$0 = \cos p\xi + V \cos 2p \frac{e^{p\xi} + e^{-p\xi}}{2}.$$

Für die Schwingungsarten gerader Ordnungszahl ist:

$$A_1 = A_0 e^{i2p}, \quad A_2 = A_1 e^{2p}, \quad A_3 = A_2 e^{-i2p},$$

und daher, wenn man wiederum über  $A_0$  auf gewisse Weise verfügt:

$$2F(u) = e^{p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} + e^{-ip\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} + e^{-p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} + e^{ip\left(\frac{u}{c}-1-i\right)}$$

oder:

$$F(u) = \cos p\left(\frac{ui}{c} + 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right),$$

$$G(v) = \cos p\left(\frac{vi}{c} - 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{v}{c} - 1 + i\right),$$

und für die Oberfläche:

$$\varphi = \cos p(\xi - i) + \cos p(1 + i\xi) + \cos p(\xi + i) + \cos p(1 - i\xi)$$

oder:  $\varphi = (e^p + e^{-p}) \cos p \xi + \cos p (e^{p \xi} + e^{-p \xi})$ .

Es ist aber:  $\frac{e^p + e^{-p}}{2} = \frac{\cos p}{\sqrt{\cos 2p}}$ ,

wo das Vorzeichen der Wurzelgrösse mit dem von  $\cos p$  übereinstimmen muss. Abgesehen von einem constanten Factor hat man daher auch:

$$\varphi = \cos p \xi + \sqrt{\cos 2p} \frac{e^{p \xi} + e^{-p \xi}}{2}.$$

Auch hier ist in den Knoten  $\varphi = 0$ , in den Bäuchen  $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$ ,

d. h.:  $0 = \sin p \xi - \sqrt{\cos 2p} \frac{e^{p \xi} - e^{-p \xi}}{2}$ .

Die folgende Tafel enthält für die einzelnen Schwingungsarten die Ordnungszahl, die Schwingungszahl und die Werthe von  $\xi$ , die den Knoten und Bäuchen entsprechen.

Ordnungszahl	Schwingungszahl	Knoten	Bäuche
1	1	0	—
2	1,5243	$\pm 0,55170$	0
3	1,9824	0	$\pm 0,38325$
—	—	$\pm 0,73580$	—
4	2,3448	$\pm 0,28838$	0
—	—	$\pm 0,81111$	$\pm 0,56000$
5	2,6586	0	$\pm 0,22263$
—	—	$\pm 0,44644$	$\pm 0,65776$
—	—	$\pm 0,85310$	—

#### IV. Ueber die Fortführung der Electricität durch strömendes Wasser in Röhren und verwandte Erscheinungen; von E. Dorn in Breslau.<sup>1)</sup>

15. Mein experimentelles Resultat steht in Widerspruch mit dem von Hrn. Edlund erhaltenen<sup>2)</sup>, der bei gleicher Ge-

1) Fortsetzung von 9. p. 552.

2) Edlund, Wied. Ann. 1. p. 173. 1877 u. 8. p. 127 ff. 1879.

schwindigkeit die Stromstärke unabhängig vom Querschnitt findet, und ich werde zunächst die möglichen Ursachen eines so abweichenden Ergebnisses zu discutiren haben.

Bei meinen eignen Beobachtungen variierte der Querschnitt der Röhren in jedem der beiden Sortimente vom Einfachen bis Zwanzigfachen, und es sind jedesmal wenigstens vier gleich behandelte Röhren verglichen. Das Reinigungsverfahren ist mannichfaltig abgeändert und auch Schellacküberzüge sind benutzt. Wenn trotzdem sich überall annähernd dasselbe Gesetz zeigt, so können Zufälligkeiten der Beobachtung nicht von Einfluss gewesen sein.

Wie aus der Zusammenstellung der mittlern Fehler<sup>1)</sup> hervorgeht, darf man den zur Geschwindigkeit  $u = 8$  Meter/Sec. gehörigen Druck  $p_g$  bis auf 1 Proc. als richtig annehmen, und zur Umrechnung der electromotorischen Kräfte auf diesen Druck ist die Proportionalität beider Grössen nur zwischen Grenzen benutzt, für welche sie bei der nahezu engsten, einer mittlern und der weitesten Röhre bis auf Bruchtheile eines Procentes nachgewiesen ist. Der Querschnitt der Röhren ist nach der scharfen Coulomb'schen Methode bestimmt.

Die Bestimmung der electromotorischen Kräfte setzte Gleichheit der Polarisation für ruhendes und strömendes Wasser voraus, welche für die hier auftretenden schwachen Ströme von kurzer Dauer nachgewiesen ist. Ein hingegen erhobenes Bedenken würde für meine Versuche kaum eine Bedeutung haben, da die Electroden besonders der letzten Versuche sehr gross waren (bis 12,5 qcm), und das Wasser bei ihnen nur mit geringer Geschwindigkeit vorbeiströmte. Denn ausser bei 1, 2, 7 befanden sie sich in den seitlichen Ansätzen weiter Glasröhren von 9,3 mm Durchmesser, zwischen denen die zu untersuchenden eingekittet wurden.

Die Grundlagen der Berechnung dürfen somit auch als gesichert gelten.

Hrn. Edlund's erste Beobachtungen<sup>2)</sup> sind ohne vor-

1) s. Bd. 9. p. 544.

2) Edlund, Wied. Ann. 1. p. 169 ff. 1877.

herige Reinigung der Röhren angestellt, und ich darf mich daher auf eine Besprechung der späteren<sup>1)</sup> beschränken.

Dieselben beziehen sich auf Vergleichung von je zwei Röhren, deren Querschnitte sich etwa wie 1:2,8, resp. 1,4 und 4,2 verhielten, also in ziemlich engen Grenzen blieben. Die in seitliche Ansätze der Röhren selbst eingekitteten Electroden (Golddrähte) hatten eine verhältnissmässig geringe Oberfläche, und die Polarisation war ziemlich bedeutend.

Die Berechnung der Versuche, deren Einzelheiten a. a. O. nachgesehen werden mögen, beruht einmal auf der Annahme, dass die Stromstärken dem Quadrate der mittlern Geschwindigkeit des Wassers proportional sind. Man könnte Bedenken tragen, ob dies Gesetz noch hinreichend genau ist für Aenderungen derselben im Verhältniss 1:2,781 (Vers. 9), doch überzeugt man sich leicht, dass hierin nicht der Grund der Abweichung der Resultate von den meinigen liegen kann, indem die Einführung einer niedrigeren Potenz der Geschwindigkeit die Differenz nur vergrössern würde.

Ferner bedient sich Hr. Edlund des Depolarisators, um die bei fliessendem Wasser beobachtete Stromstärke vom Einflusse der Polarisation zu befreien, und ermittelt das Verhältniss der Querschnitte der Röhren mit Benutzung derselben Instruments.

Ich werde nun aber nachweisen, dass beim Depolarisator zwei von Hrn. Edlund nirgend erwähnte Fehlerquellen auftreten, welche beide die Ablenkungen für grössere Widerstände verhältnissmässig grösser ausfallen lassen als für kleinere.

Möglichenfalls hat auch die Buchsbaumscheibe des Instruments von Hrn. Edlund ungenügend isolirt, was einen Fehler in demselben Sinne zur Folge haben würde.

Zunächst werde untersucht, wie gross der Fehler der Depolarisatormessungen sein müsste, um von der Verschiedenheit der Resultate Rechenschaft zu geben.

Bei der Versuchsanordnung *A* von Hrn. Edlund<sup>2)</sup> sei

1) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 127 ff. 1879.

2) l. c. 8. p. 127 ff. 1879.

für die engere Röhre  $o$  die Ablenkung bei ruhendem,  $p$  bei gedrehtem Depolarisator,  $\alpha_1$ ,  $p_1$  die entsprechenden Größen für die weitere Röhre,  $\delta$  der Depolarisatorfactor, so setzt Hr. Edlund:

$$1 - \alpha = \frac{o}{p \delta}, \quad 1 - \alpha_1 = \frac{o_1}{p_1 \delta}.$$

Nehme ich ferner bei gleicher mittlerer Geschwindigkeit (abweichend von Hrn. Edlund) die Stromstärke dem Radius proportional an, benutze aber zur Reduction auf die gleiche Geschwindigkeit die Proportionalität mit dem Quadrate derselben, so werden die Stromstärken für die beiden Röhren:  $x = Cu^2 r$  resp.  $x_1 = Cu_1^2 r_1$ , wo  $u$  und  $u_1$  die Geschwindigkeiten bedeuten und  $C$  eine Constante ist.

Da nun aber beide Röhren von derselben Wassermenge durchflossen werden, so ist:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{r_1^2}{r^2}, \quad \text{somit: } \frac{x}{x_1} = \frac{r_1^3}{r^3}.$$

Andererseits folgt dies Verhältniss:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{a + b}{a - b} \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha} = \frac{a + b}{a - b} \frac{o_1}{o} \frac{p}{p_1},$$

wo  $a$  und  $b$  die beiden Ablenkungen des Galvanometers sind. Mit Berücksichtigung der gleichen Länge beider Röhren setzt Hr. Edlund ferner:

$$\frac{r_1^2}{r^2} = \frac{p}{p_1},$$

sodass:

$$(g) \quad \left( \frac{a + b}{a - b} \frac{o_1}{o} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{p_1}{p}.$$

Der Versuch 9 ergab nun:

$$\begin{array}{ll} a = 38,59 & b = 28,75 \\ o = 28,3 & o_1 = 98,63 \\ p = 21,47 & p_1 = 59,7. \end{array}$$

Die linke Seite der Gleichung wird 3,499, die rechte 2,781, sodass also das Verhältniss der Ablenkungen bei gedrehtem Depolarisator um  $1/5$  seines eignen Werthes fehlerhaft sein müsste. Schon geringe Beobachtungsfehler in  $a$  und  $b$  ändern das Resultat sehr bedeutend; so genügt die Annahme  $b = 27,75$ , um links 3,371 zu erhalten. Änderungen der Röhrenwand während der Versuche von weit grösserem

Einfluss sind häufig, doch werde 3,499 als richtig zu Grunde gelegt.

Leider gibt Hr. Edlund bei den übrigen Versuchen nicht genug Detail, um eine analoge Rechnung durchzuführen.<sup>1)</sup>

16. Bei einem Versuche, den Depolarisatorfactor mit Benutzung einer Nebenschliessung und der 34000 Windungen zählenden Rollen des Siemens'schen Galvanometers zu bestimmen, ergab mir eine Drehung des Depolarisators etwa  $\frac{1}{4}$  der erwarteten Ablenkung. Als ich ferner (am 19. Nov. 1878) mit Hülfe des Depolarisators den Widerstand des destillirten Wassers in den Röhren 21 und 22 messen wollte, erhielt ich Ausschläge, welche mit wachsender Drehungsgeschwindigkeit stiegen und auf den 10fachen Betrag des wahrscheinlich richtigen Werthes gebracht werden konnten.

Die ausgedehnte Anwendung des Depolarisators von Seiten des Hrn. Edlund bewog mich, diese Verhältnisse näher zu untersuchen, indem ich hoffte, hier vielleicht den Grund unserer abweichenden Resultate zu entdecken, und ich bemerkte bald, dass die eben beschriebenen auffälligen Erscheinungen theils durch den Schliessungsextrastrom im Galvanometer, theils durch Ladungsvorgänge hervorgerufen werden.

17. Aus einem Elemente der electromotorischen Kraft  $E$ , dem Galvanometer und dem Depolarisator sei ein einfacher Stromkreis gebildet, dessen gesampter Widerstand  $W$  sei. Wird der Depolarisator gedreht, so wird der Strom abwechselnd geschlossen und unterbrochen.

Das Potential des Stromkreises auf sich selbst,  $P$ , wird fast ausschliesslich von dem Galvanometer herrühren, da die geradlinigen Theile der Leitung einen geringen Beitrag liefern, und auch die Widerstände der Siemens'schen Stöpselrheostaten wegen ihrer „bifilaren“ Wicklung fast keine Extrastrome geben, wovon ich mich direct überzeugt habe.

Da kein Oeffnungsfunke entsteht, kann sich der Oeff-

1) Der Versuch 10 l. c. stimmt übrigens ohne weiteres ziemlich gut mit der Annahme der Proportionalität mit dem Radius.

nungsextrastrom nicht ausbilden, und die Betrachtung kann sich auf den Schliessungsextrastrom beschränken.

Für diesen ist<sup>1)</sup>

$$i = \frac{1}{W} \left( E - P \frac{di}{dt} \right),$$

woraus:

$$i = \frac{E}{W} \left[ 1 - e^{-\frac{W}{P} t} \right],$$

wenn die Zeit vom Augenblicke der Stromschliessung gerechnet wird, sodass für  $t = 0$  auch  $i = 0$  ist.

Es sei nun bei gedrehtem Depolarisator die Dauer jedes Contactes  $t_1$ , jeder Unterbrechung  $t_2$ , so wird während eines Contactes der Integralstrom sein:

$$\int_0^{t_1} i dt = \frac{E}{W} \left[ t_1 - \frac{P}{W} \left( 1 - e^{-\frac{W}{P} t_1} \right) \right],$$

woraus, da während  $t_2$  kein Strom vorhanden ist, die am Galvanometer beobachtete mittlere Stromstärke folgt:

$$(1) \quad J = \frac{1}{t_1 + t_2} \int_0^{t_1} i dt = \frac{E}{W} \left[ \frac{t_1}{t_1 + t_2} - \frac{P}{W} \left( \frac{1 - e^{-\frac{W}{P} t_1}}{t_1 + t_2} \right) \right].$$

Da bei meinem Depolarisator einer Umdrehung der Kurbel 10 Drehungen der Scheibe entsprachen, und bei einer Drehung der letztern 24 Stromschliessungen stattfanden, so ist  $t_1 + t_2$ , die Zwischenzeit zwischen je zwei successiven Stromschliessungen, leicht zu ermitteln. Wurde die Kurbel in zwei Sec. einmal herumgeführt, so war  $t_1 + t_2 = \frac{1}{10}$  Sec., bei der doppelten Geschwindigkeit  $\frac{1}{5}$  Secunde.

Für einen Stromkreis, bei welchem der Einfluss von  $P$  unmerklich ist, sei die Stromstärke für Ruhe und Drehung des Depolarisators beobachtet, so ist der Quotient, früher als „Depolarisatorfactor“ bezeichnet:

$$\delta = \frac{t_1 + t_2}{t_1},$$

sodass man hierin ein Mittel zur experimentellen Bestimmung von  $t_1$  besitzt. Ob man den zweiten Term in der

1) Helmholtz, Pogg. Ann. 83. p. 510. 1853.

Gleichung (1) vernachlässigen kann, erkennt man leicht daraus, dass dann bei Steigerung der Drehungsgeschwindigkeit die Ablenkung ungeändert bleiben muss.

Ich bemerke, dass, wenn ich einen einfachen Stromkreis aus Siemens'schen Widerstandsrollen und einer Rolle des Galvanometers von 775 Windungen bildete, eine Änderung der Ablenkung nicht constatirt werden konnte, während sie bei Anwendung beider Rollen noch nicht ein Prozent betrug. Beide Versuchsanordnungen durften somit noch zur Bestimmung von  $\delta$  benutzt werden.

Eine directe Berechnung von  $P$  aus der Formel (1) würde eine unbequeme Auflösung einer transzendenten Gleichung erfordern; ich umging diese Schwierigkeit durch folgende Anordnung der Beobachtungen.

Es wurde zunächst die Ablenkung bei ruhendem Depolarisator beobachtet:

$$(2) \quad J_r = \frac{E}{W},$$

dann für 120 Stromschliessungen in der Secunde  $J$ , welches leicht in die Form gesetzt werden kann:

$$(3) \quad J = J_r \left[ \frac{1}{\delta} - \frac{P}{W} \left( \frac{1 - e^{-\frac{W}{P} t_1}}{t_1 + t_2} \right) \right],$$

und endlich nach Verdoppelung der Drehungsgeschwindigkeit:

$$(4) \quad J' = J_r \left[ \frac{1}{\delta} - \frac{P}{W} \left( \frac{1 - e^{-\frac{W}{P} \frac{t_1}{2}}}{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)} \right) \right].$$

Nenne ich noch der Kürze wegen  $\frac{J_r}{\delta} : J_0$ , so folgt aus (3) und (4):

$$(5) \quad \frac{2(J_0 - J)}{J_0 - J'} = 1 + e^{-\frac{W}{P} \frac{t_1}{2}}.$$

Diese Gleichung liefert einen Näherungswert für  $P$ , der leicht durch Benutzung von (3) und (4) corrigirt werden kann.

Hat man nicht einen unverzweigten Stromkreis, so sei  $W_s$  der Widerstand desjenigen Zweiges, welcher das Element enthält,  $W_n$  derjenige der Nebenschliessung, und endlich  $W_g$  der Widerstand des Zweiges mit Galvanometer und Depo-

larisator. Da ein merklicher Extrastrom nur in dem letzten genannten Zweige auftritt, liefert eine Anwendung der Prinzipien von Hrn. Helmholtz:<sup>1)</sup>

$$(1') \quad J = \frac{E W_n}{N} \left[ \frac{1}{\delta} - \frac{P(W_e + W_n)}{N} \frac{\left(1 - e^{-\frac{N t_1}{(W_e + W_n) P}}\right)}{t_1 + t_2} \right],$$

$$(2') \quad J_r = \frac{E W_n}{N},$$

$$(3') \quad J = J_r \left[ \frac{1}{\delta} - \frac{P(W_e + W_n)}{N} \frac{\left(1 - e^{-\frac{N t_1}{(W_e + W_n) P}}\right)}{t_1 + t_2} \right],$$

$$(4') \quad J' = J_r \left[ \frac{1}{\delta} - \frac{P(W_e + W_n)}{N} \frac{\left(1 - e^{-\frac{N}{(W_e + W_n) P} \cdot \frac{t_1}{2}}\right)}{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)} \right],$$

$$(5') \quad \frac{2(J_0 - J)}{J_0 - J'} = 1 + e^{-\frac{N}{(W_e + W_n) P} \cdot \frac{t_1}{2}}.$$

Hierin ist:

$$N = W_e W_n + W_e W_g + W_n W_g.$$

Eine Vergleichung dieser Formeln mit den entsprechenden für einen unverzweigten Stromkreis lässt erkennen, dass die Anbringung einer Nebenschliessung einen verhältnismässig stärkern Einfluss der Extraströme zur Folge hat. Da nämlich der Grösse  $\frac{1}{W}$  in (2) bei einer Nebenschliessung  $\frac{W_n}{N}$  entspricht, so erscheint der zweite Term in (1') etc.  $1 + \frac{W_e}{W_n}$  mal grösser als der entsprechende in (1) etc. bei gleichem  $J_r$  und  $J_0$ .

18. Um die entwickelte Theorie zu prüfen und  $P$  zu bestimmen, habe ich zwei Beobachtungsreihen angestellt.

27. Jan. 1880. Das Galvanometer war mit den beiden Rollen von je 775 Windungen versehen. Die Rollen mit 34000 Windungen waren möglichst in derselben relativen Lage, die sie am Galvanometer hatten, auf den Tisch gestellt und konnten in den Stromkreis, der ein Meidinger'sches Element, zwei Siemens'sche Widerstandskästen und

1) Helmholtz, l. c. p. 511 ff.

den Depolarisator enthielt, nach Belieben eingeschaltet werden. Waren sie ausgeschaltet, so wurde ein dem Widerstande derselben gleicher zugefügt, sodass hier  $W$  immer ungeändert blieb.

Es wurde beobachtet:

Galvanometerrollen	1) $W = 13371$			2) $W = 8371$	
	$J_r$	$J$	$J'$	$*J$	$J'$
eingeschaltet	851,0	101,9	70,7	123,9	76,5
ausgeschaltet	351,0	187,9	187,1	300,1	297,7
eingeschaltet	350,8	103,1	70,5	126,1	78,1

\*  $J_r$  fiel ausserhalb der Scala.

Die mittlere Beobachtung von (1) lieferte zunächst  $\delta = 1,868$ ,  $t_1 = 0,004461$  Sec., und es ergab sich im Mittel:

$$P = 30,72 \pm 1,00 \text{ Siemens. Secunden.}$$

Die hiermit nach (3) und (4) berechneten Werthe von  $J$  und  $J'$  sind mit den beobachteten noch einmal zusammengestellt:

$J$ ber.	$J$ beob.	Differ.	$J'$ ber.	$J'$ beob.	Differ.
105,0	102,5	+2,5	67,7	70,6	-2,9
126,5	125,0	+1,5	75,3	77,3	-2,0

Ich halte die Beobachtungen  $J$ , also die bei langsamerer Drehung, für zuverlässiger, da das laute Geräusch bei schnellerer Drehung das Hören der Uhrschläge erschwerte.  $P$  würde demnach etwas zu verkleinern sein, und in gleichem Sinne würde auch noch die Berücksichtigung des geringen Beitrages wirken, den die hier am Galvanometer befestigten Rollen mit wenigen Windungen lieferten.

Bezeichne ich die electromagnetische und electrodynamische absolute Widerstandseinheit mit  $W_{elm}$ , resp.  $W_{eldy}$ , so ist:

1 Siemens =  $0,9550 \cdot 10^{10} W_{elm} = \frac{1}{2} \cdot 0,9550 \cdot 10^{10} W_{eldy}$ ,  
sodass also:

$$P = 30,72 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,9550 \cdot 10^{10} W_{eldy} \cdot \text{Sec.} = 14,67 \cdot 10^{10} \text{ mm.}$$

Versuche mit Nebenschliessungen am 26. Jan. 1880 gelangen weniger gut, da sich die Federn des Depolarisators während der Versuche in die rotirende Scheibe einschliffen

und hierdurch  $\delta$  eine Änderung erlitt, sodass nur ein angenäherter Werth durch Interpolation gewonnen werden konnte.

Bei den eigentlichen Versuchen trug das Galvanometer hier die Rollen mit vielen Windungen, vor und nach denselben wurde  $\delta$  unter Anwendung des andern Rollensystems bestimmt. In folgendem Täfelchen sind die beobachteten und die nach (3') und (4') unter Annahme von  $P = 30,72$  berechneten Werthe zusammengestellt.

$W_e$	$W_g$	$W_n$	$\delta$	$t_1 10^5$	$J_r$	$J'_r$ beob.	ber.	Diff.
5000	8365	50	2,119	3,933	141,5	28,45	25,90	-2,55
						18,4	15,15	-3,25
5000	3371	50	2,224	3,747	344,5	30,75	28,30	-2,45
						19,0	15,1	-3,90
5000	8365	100	*1,869	4,458	287,6	67,5	65,26	-2,24
						45,3	38,80	-6,50

\* Die Federn waren inzwischen anders gestellt.

Die Differenzen röhren hauptsächlich von der Unsicherheit von  $\delta$  und der dadurch bedingten von  $t_1$  her und werden um so weniger befremden, als das Endresultat der Rechnung für  $J$  und  $J'$  als die verhältnissmässig kleine Differenz zweier grosser Zahlen erscheint, z. B. in der vierten Beobachtung:  $154,9 - 139,8 = 15,1$ . Eine Verringerung von  $\delta$  um 2 Proc. würde die Differenzen fast verschwinden lassen.

Diese Versuche dürfen somit auch als eine Bestätigung der Formeln (3') und (4') gelten.

In früher mitgetheilten Versuchen<sup>1)</sup> habe ich den Depolarisator zu Widerstandsbestimmungen von destillirtem Wasser benutzt, unter Anwendung derselben Galvanometerrollen von 34000 Windungen, deren Potential auf sich selbst soeben = 30,72 Siemens. Secunde gefunden war.

Da der Stromkreis unverzweigt war, ist die Formel (3) anzuwenden;  $W$  betrug mindestens  $1,1 \cdot 10^6$  Siemens,  $t_1 + t_2$  nahe  $\frac{1}{240}$ ,  $\delta$  nahe 2. Die Exponentialgrösse wird verschwindend klein, und man erhält:

$$J = J_r [ \frac{1}{2} - 0,00670 ],$$

1) S. Bd. 9. p. 535.

d. h. bei Vernachlässigung des letzten Gliedes einen Fehler von 1,34 Proc. Die von mir experimentell ermittelte und angewandte Correction von 1,52 Proc. stimmt hiermit fast genau überein.

Hr. Edlund theilt eine mit dem Depolarisator ausgeführte Widerstandsmessung<sup>1)</sup> mit, deren Resultat mit dem nach einer einwurfsfreien Methode erhaltenen übereinstimmte. Dies beweist aber nicht, dass der Einfluss des Schliessungsextrastromes unmerklich gewesen ist, denn auch bei Anwendung des Depolarisators ersetzt Hr. Edlund den Flüssigkeitswiderstand durch einen Drahtwiderstand und schliesst auf ihre Gleichheit aus der Uebereinstimmung der Ausschläge bei gedrehtem Depolarisator. Der Einfluss des Extrastromes musste natürlich beide mal derselbe sein. Hingegen gibt Hr. Edlund an, dass eine Änderung der Umdrehungsgeschwindigkeit die Ablenkung von 136,5 auf 125,5 herabsetzte, was die Wirkung der Extrastrome deutlich zeigt. Da Hr. Edlund für seine späteren Untersuchungen<sup>2)</sup> Multiplicatoren von viel grösserer Windungszahl benutzte, so werden bei diesen die Extrastrome sich noch weit mehr bemerkbar gemacht haben.

19. Folgende Beobachtungen zeigen, dass die Benutzung des Depolarisators Ladungsvorgänge hervortreten lässt bei Kapazitäten, wo dieselben unter gewöhnlichen Umständen unmerklich bleiben.

Von der „Axenfeder“  $a$ , welche mit der einen Messingscheibe des Depolarisators in Verbindung stand, führte die

Leitung über das Plath'sche Galvanometer  $G$  und eine Batterie  $E$  von 2 Daniell zur andern Axenfeder  $a_1$ . Die schleifenden Federn  $s$  und  $s_1$  treten bei Drehung des Depolarisators abwechselnd mit  $a$  und  $a_1$ , resp.  $a_1$  und

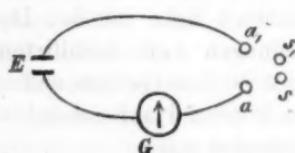


Fig. 3.

$a$  in Verbindung, sodass  $s$  und  $s_1$  sowie mit ihnen verbundene Leiter abwechselnd entgegengesetzt geladen werden. Die hierdurch entstehenden Ladungsströme lenken  $G$  ab.

1) Edlund, Pogg. Ann. 156. p. 274. 1875.

2) Edlund, Wied. Ann. 1. p. 161. 1877, und 8. p. 121. 1879.

Die Ablenkungen  $A_1$  und  $A_2$  (entsprechend einer Drehung der Kurbel in 1 resp. 2 Secunden) sind schon mit einer Correction wegen der Nebenschliessung durch den Fuss des Instrumentes versehen.

$$20. \text{ Octbr. 1879. } 1 \text{ mm Ablenkung} = \frac{1}{1,069 \cdot 10^9} \frac{\text{Daniell}}{\text{Siemens}}$$

$$\delta = 2,08. \text{ 2 Daniell.}$$

Versuch	Anordnung (geladene Theile)	$A_2$	$A_1$
1	$s$ und $s_1$ allein . . . . .	3,62	7,40
2	$s, s_1$ + Drähte von je 2,1 m . . .	8,63	15,70
3	Dasselbe + Commutator . . . . .	14,75	27,88
4	Wie (3) + dünne Leitungsdrähte . .	18,03	31,85
5	„ (4) + Röhre 21 (dest. Wasser)	26,03	40,95
6	„ (4) + Röhre 22 . . . . .	56,55	70,40
7	„ (4) . . . . .	16,68	32,82
8	„ (4) + Ansätze* . . . . .	19,71	36,41

\* Dieselben Ansätze, worin bei (5) und (6) die Röhren eingekittet waren, mit Wasser gefüllt und isolirt.

In allen Versuchen ausser (5) und (6) waren  $s$  und  $s_1$  voneinander isolirt; bei letzteren durch das Wasser in den Röhren verbunden. Eine directe Schliessung von (21) und (22') ergab bei ruhendem Depolarisator 21,55 und 78,75.

Man sieht, wie bei Hinzufügung eines jeden neuen Stückes die Ablenkung wächst, und wie auch die Versuche (5) und (6) mit den Röhren sich den andern vollkommen anschliessen.

Bei den weiter mitzutheilenden Versuchen waren  $aa_1$  und  $ss_1$  vertauscht, sodass nun auch die Messingplatten alternirend geladen wurden:

$$16. \text{ Octbr. 1879. } 1 \text{ mm} = \frac{1}{1,133 \cdot 10^9} \frac{\text{Daniell}}{\text{Siemens}}. \text{ 2 Daniell.}$$

Versuch	Anordnung	$A_2$
1	Depolarisator allein . . . . .	24,33
2	Drähte von je 12 m jeder um einen Stuhl gewickelt . . .	39,08
3	Dieselben parallel in eine Rolle gewickelt . . . . .	357,81

Der Versuch 3 ist bereits von der etwa 16 mm betragenden Ablenkung befreit, welche von der unvollkommenen Isolation

der Bespinnung der zusammen aufgewickelten Drähte hörte, und zeigt im Vergleich mit 2, wie sehr die Capacität durch die nun eintretende Bindung der entgegengesetzten Electricitäten gesteigert wird.

Bei Gelegenheit der schon mitgetheilten Versuche vom 25. Aug. 1879<sup>1)</sup> habe ich auch folgende Depolarisatorbeobachtungen gemacht, bei denen die Kurbel in 4, 2, 1 Sec. einmal herumgeführt wurde:

Röhre	$A_4$	$A_2$	$A_1$	
41	15,8	26,6	47,2	
21	24,0	32,3	50,3	
22	50,9	57,9	73,3	
			$\delta = 2,10$	2 Meidinger.

Bei ruhendem Depolarisator wurden die Ablenkungen erhalten 2,275 — 22,33 — 79,00.

Zu einer die Beobachtungen wenigstens annähernd darstellenden Theorie gelangte ich durch folgende Betrachtung.

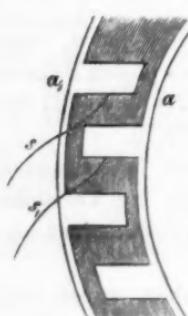


Fig. 4.

$a_1$  sei zur Erde abgeleitet, so wird auf  $a_1$  das Potential 0, auf  $a$  hingegen  $E$  sein, wenn dies die electromotorische Kraft der Elemente ist. Die Capacität einer jeden schleifenden Feder und der mit ihr verbundenen Leiter sei  $C$ . Im Augenblicke  $t = 0$ , wo  $s$  einen Ansatz von  $a_1$  verlässt, besitzt es das Potential und die Electricitätsmenge 0, das gleichzeitig von  $a$  heruntergleitende  $s_1$  aber  $E$ , resp.  $CE = Q_0$ .

Betrachten wir gleich den Fall, wo zwischen  $s$  und  $s_1$  eine Röhre mit Wasser eingeschaltet ist. Findet im übrigen Isolation statt, so wird während der Zeit  $t_2$ , welche  $s$  und  $s_1$  auf Ebonit verweilen, ein Ueberströmen der Electricität von  $s_1$  nach  $s$  eintreten.

Seien in jedem Moment dieser Periode die Potentiale auf  $s$  und  $s_1$   $V$ , resp.  $V_1$ , so werden auf ihnen die Electricitätsmengen  $Q = CV$ , resp.  $Q_1 = CV_1$  sich befinden, und zwar wird wegen der vorausgesetzten Isolation  $Q + Q_1 = Q_0$  sein.

1) S. Bd. 9. p. 540.

Während  $dt$  tritt von  $s_1$  zu  $s$  die Electricitätsmenge:

$$dQ = idt$$

über, wo:

$$i = \frac{V_1 - V}{W} = \frac{Q_1 - Q}{CW} = \frac{Q_0 - 2Q}{CW},$$

wenn  $W$  den Widerstand der Röhre bedeutet. Demnach ist:

$$dQ = \frac{Q_0 - 2Q}{CW} dt.$$

Mit Rücksicht darauf, dass für  $t = 0$   $Q = 0$ , erhält man aus dieser Gleichung leicht:

$$Q = \frac{CE}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2t_1}{CW}} \right)$$

für diejenige Electricitätsmenge, welche am Ende des Zeitraumes  $t_1$  auf  $s$  übergegangen ist.

Jetzt kommt  $s$  in Berührung mit  $a$ , wodurch seine Electricitätsmenge auf  $CE$  gebracht wird, und die zuströmende Menge:

$$\frac{CE}{2} \left( 1 + e^{-\frac{2t_2}{CW}} \right)$$

geht durch das Galvanometer.  $s_1$  gelangt in Contact mit  $a_1$  und entladet seine Electricität zur Erde.

Während der Dauer  $t_1$  des Contactes findet ferner die Stromstärke statt:

$$\frac{E}{W}$$

Die mittlere Stromstärke für die ganze Dauer  $t_1 + t_2$  wird somit:

$$(6) \quad J = \frac{Et_1}{W(t_1 + t_2)} + \frac{CE}{2(t_1 + t_2)} \left( 1 + e^{-\frac{2t_2}{CW}} \right)$$

und diese wird am Galvanometer beobachtet.

Falls keine Verbindung zwischen  $s$  und  $s_1$  besteht, hat man  $W = \infty$  zu setzen und erhält:

$$(7) \quad J = \frac{CE}{t_1 + t_2}.$$

Man findet übrigens dasselbe Resultat, wenn man die Ableitung zur Erde so gelegt denkt, dass auf  $a$  und  $a_1$  die Potentialwerthe  $\frac{E}{2}$ , resp.  $-\frac{E}{2}$  stattfinden.

Diese Formeln können nur angenähert gelten, da bei den Versuchen ein Theil der Electricität, die  $s$ , resp.  $s_1$  mit-

getheilt wird, sich zerstreut und vielleicht auch die Ladung eine unvollständige bleibt, und zwar umso mehr, je grösser die Drehungsgeschwindigkeit ist.

Aus (6) lässt sich  $C$  durch successive Näherung berechnen, wenn man noch  $\frac{E}{W}$ , d. h. die ohne Polarisation bei ruhendem Depolarisator stattfindende Stromstärke kennt. Bei den Röhren 41 und 21 kann man dafür mit genügender Näherung die bei ruhendem Depolarisator beobachtete Stromstärke nehmen, bei 22' habe ich die aus den Dimensionen und dem Widerstände des Wassers berechneten Ablenkungen 83,62 (25. 8. 79) und 83,60 (20. 10. 79) benutzt.

Wie man  $t_2$  und  $t_1 + t_2$  bestimmt, ist schon früher aus einandergesetzt, und im Obigen sind alle Data zur Rechnung gegeben.

Die Ausführung derselben lieferte folgende Werthe der mit  $10^{21}$  multiplicirten Capacität  $C$  in absoluten electromagnetischen Einheiten:

Datum	Apparat	1 Drehung der Kurbel in		
		4 Sec.	2 Sec.	1 Sec.
25. 8. 79.	Röhre 41 . . .	10,31	8,68	7,70
	Röhre 21 . . .	13,35	9,70	7,97
	Röhre 22' . . .	14,21	11,00	9,06
20. 10. 79.	Isolirte Ansätze	—	8,04	7,43
	Röhre 21 . . .	—	9,41	8,00
	Röhre 22' . . .	—	12,64	10,46

Die hiermit berechneten Werthe der Ablenkungen stimmen mit den beobachteten bis auf Differenzen von höchstens 0,15 Scalentheile überein.

Wollte man die Capacitäten in Mikrofarad (1 Mikrofarad =  $10^{16}$  abs. Einh.) ausdrücken, so hätte man die im Täfelchen vereinigten Zahlen mit  $10^{-5}$  zu multipliciren.

Man bemerkt, wie  $C$  mit zunehmenden Röhrendimensionen wächst, was zu erwarten ist, da sich ja auch auf der Oberfläche des Wassers in der Röhre freie Electricität an sammeln muss. Die Capacitäten fallen für gesteigerte Drehungsgeschwindigkeit immer kleiner aus, und zwar ist bei den isolirten Ansätzen das Zurückbleiben gering, grösser

für die Röhren. Dies hat vielleicht seinen Grund in unvollständiger Ladung während des kurzen Contactes, wahrscheinlicher ist mir, dass die freie Electricität auf der Oberfläche des Wassers in der Röhre erst im Laufe des Contactes den Werth wie für stationäre Strömung erreicht, sodass beim Beginne des Contactes der (in der Rechnung dem stationären gleich gesetzte) Strom einen geringern Werth hat. Es wären dies also ähnliche Vorgänge wie in Kabeln, deren Verhalten ja auch von dem Producte Capacität  $\times$  Widerstand abhängt. Während aber die Kabel einen verhältnissmässig geringen Widerstand bei hoher Capacität haben, erreicht hier das Product infolge des grossen Widerstandes einen merklichen Werth.

Um den Fehler zu schätzen, den die Ladungerscheinungen in meinen Widerstandsmessungen zur Folge gehabt haben können, erinnere ich zunächst daran, dass eine Steigerung der Drehungsgeschwindigkeit von  $\frac{1}{2}$  auf 1 Kurbeldrehung in der Secunde die Ablenkung nicht merklich änderte, sodass sich die Ladungerscheinungen mit den Wirkungen des Schliessungsextrastromes ziemlich genau compensirt haben müssen, welche letzteren 1,52 Proc. betrugen.<sup>1)</sup>

Eine andere Bestimmung erhält man daraus, dass am 25.8. 79. die beobachtete Ablenkung  $A_2 = 26,6$  bei der Röhre 41 etwa um 25,5 Scalentheile grösser war, als sie es ohne Ladungsvorgänge gewesen wäre, welche Differenz dem zweiten Gliede der Gleichung (6) entspricht. Für die zu den Widerstandsmessungen gebrauchte weite Röhre wird dasselbe etwa halb so gross, da ferner das Siemens'sche Galvanometer etwa  $\frac{1}{10}$  der Empfindlichkeit des Plath'schen hatte, so würde bei ersterem der Fehler 1,27 Scalentheile betragen haben, was für die Widerstände, die aus Ablenkungen von 60 bis 107 Scalentheilen bestimmt wurden, 1,2 bis 2,1 Proc. Fehler ergäbe.

Mit Rücksicht auf diese Uebereinstimmung wäre es vielleicht besser gewesen, die Widerstandsbestimmungen nicht mit der Correction für die Extraströme zu versehen.

1) S. Bd. 9. p. 534.

20. Die so eben erörterten Erscheinungen, Schliessungsextraströme und Ladungsvorgänge, wirken beide dahin, die Ablenkungen für grosse Widerstände verhältnissmässig zu gross erscheinen zu lassen, wie man leicht aus den Formeln (3), (3') und (6) erkennt.

Das unwahrscheinliche Resultat, dass bei Hrn. Edlund für engere Röhren die „Polarisationsconstante“ (Quotient der Polarisation durch die von ihr befreite electromotorische Kraft) mitunter grösser wird als für weitere derselben Länge bei demselben Wasser (s. Vers. 9, 13, 14)<sup>1)</sup>, lässt derartige Fehlerquellen vermuten.

Ob ihr Einfluss ausreicht, um den Unterschied der Resultate von Hrn. Edlund und mir zu erklären, kann natürlich nur durch eine Untersuchung der Apparate des Hrn. Edlund festgestellt werden; folgende kleine Rechnung soll nur die Möglichkeit zeigen.

Nach den von Hrn. Edlund mitgetheilten Ablenkungen bei Wasserstrom glaube ich die Empfindlichkeit seines Galvanometers etwa halb so gross wie die meines Plath'schen schätzen zu dürfen. Nehme ich für seinen Depolarisator auch nur 120 Stromwechsel in der Secunde, so wird im Hinblick auf das Täfelchen (p. 58) der Werth 6,4 Scalenteile für die Ladungsströme nicht übertrieben erscheinen. Vermindert man die Ablenkungen 59,7 und 21,47 bei gedrehtem Depolarisator um diesen Betrag, so wird der Quotient  $\frac{53,3}{15,07} = 3,537$ , also bereits grösser als oben<sup>2)</sup> erfordert, um Uebereinstimmung mit meinen Resultaten zu erlangen.

Da ferner Hrn. Edlund's Galvanometer viele Windungen und eine wahrscheinlich grössere Drahtmasse als mein Siemens'sches besitzt, so kann das Potential desselben auf sich selbst leicht das Vierfache, also etwa 120 Siem. Sec. betragen. Wäre ferner der Widerstand des Wassers in der weiten Röhre 300 000 Siemens gewesen, so würde,  $t_1 + t_2 = \frac{1}{15}$  gesetzt, die Klammer der Formel (3') nahezu werden:

1) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 131. 1879.

2) s. p. 49.

$$\frac{1}{2} - \frac{120 \cdot 120}{300\,000} = \frac{1}{2} - 0,048,$$

und eine Vernachlässigung des letzten Terms gäbe einen Fehler von 9,6 Proc. In der engern Röhre würde derselbe mit Rücksicht auf ihren etwa dreimal grössern Widerstand ca. 3,2 Proc. betragen, und der Quotient würde um 7,1 Proc. zu vergrössern sein.

21. In seiner vorletzten Abhandlung<sup>1)</sup> spricht Hr. Edlund unter 2) noch einmal das Gesetz aus, „dass die electromotorische Kraft mit der Ausflussgeschwindigkeit wächst, sodass sie bei kleinerer Geschwindigkeit ihrer ersten Potenz, bei grösserer aber annähernd ihrem Quadrate proportional ist“, und kritisirt dann die von mir dagegen gemachten Bemerkungen.<sup>2)</sup> Hr. Edlund gibt dieselben zunächst nicht correct wieder, denn an der angegebenen Stelle sage ich nur, „dass nach meinen Versuchen die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft von der Geschwindigkeit keine einfache gewesen sei“, und ich kann das Gesetz des Hrn. Edlund, das ich nirgend als „unrichtig ausgedrückt“ bezeichnet habe (was ich ebenso wenig in der von Hrn. Edlund angegebenen Weise motivirt habe), auch noch nicht als einfach anerkennen, da die Potenz der Geschwindigkeit von 1 bis 2 variiert, ohne dass über diese Zunahme etwas Bestimmtes festgesetzt ist.

Sodann missversteht Hr. Edlund den Sinn der von mir behaupteten Proportionalität der electromotorischen Kraft mit dem Drucke in einer Weise, zu der ich keinen Anlass gegeben zu haben glaube.

A. a. O. sage ich ausdrücklich: „Wenn die Dimensionen des angewendeten Apparates und die Flüssigkeit (sowie ihre Temperatur) gegeben sind, so ist durch den Druck die Geschwindigkeit bestimmt und umgekehrt. Um Beobachtungen, die an demselben Apparate mit derselben Röhre angestellt sind, untereinander vergleichbar zu machen, kann man somit

1) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 120. 1879.

2) Dorn, Wied. Ann. 5. p. 33. 1878.

entweder eine Beziehung der electromotorischen Kraft zum Drucke oder zur Geschwindigkeit suchen etc.“ Hiermit ist klar genug ausgesprochen, dass die Proportionalität nur für denselben Apparat gelten soll, und die Berechnung meiner Versuche mit den Röhren X, XI, XII, XIII<sup>1)</sup>) erscheint demnach als selbstverständlich und nicht als eine Inconsequenz meinerseits, wie Hr. Edlund meint.<sup>2)</sup>)

Diejenigen seiner Versuche, wo er nachweist, dass die electromotorische Kraft bei demselben Druck durch eine auch die Geschwindigkeit modificirende Aenderung des Apparates ebenfalls variiert, widerlegen somit eine Behauptung, die ich nie aufgestellt habe.

Hr. Edlund<sup>3)</sup> theilt Versuche mit<sup>4)</sup>), nach denen die electromotorische Kraft merklich langsamer zunahm als der Druck, wenn dieser von 149 auf 759 mm Quecksilber gesteigert wurde.

Zur Prüfung dieses Resultates habe ich selbst einige Beobachtungen angestellt, bei denen besondere Sorgfalt auf die Druckcorrection wegen der Niveaudifferenz zwischen dem untern Ende der Röhre und dem Wasser im Ballon verwandt wurde. Der zum Auffangen des Wassers dienende Porzellaneimer stand so tief, dass sich der Wasserstrahl schon vor seiner Erreichung in Tropfen auflöste. Die angegebenen Zahlen sind die Mittelwerthe aus je 3 rasch aufeinanderfolgenden Beobachungen;  $A_{1000}$  bedeutet die für  $p = 1000$  unter Annahme der Proportionalität mit dem Drucke berechnete Ablenkung. Die Röhre 22' ist etwa 2 Stunden nach ihrer Reinigung (mit Ammoniak und kalter Schwefelsäure) und Befestigung untersucht, 23 zunächst unter denselben Umständen, dann aber, nachdem sie 24 Stunden mit Wasser gefüllt gewesen war:

1) Dorn, Wied. Ann. 5. p. 36. 1878.

2) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 127. 1879.

3) Der folgende Schluss des § 21 ist nachträglich hinzugefügt.

4) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 121. 1879.

Dat.

3. 3. 8

8. 3. 8

9. 3. 8

Die A

was s  
VersuV  
Prop  
diese  
für z  
motor  
Noch  
derun  
weichI  
erwäh  
Wasse  
reiche  
mögli  
der S2  
mässig  
electri  
Aende  
Röhre  
wie a  
terwo

1)

Ann.

Dat.	Röhre	<i>p</i>	<i>A</i>	<i>A<sub>1000</sub></i>	Mittel	Diff.	Diff. in Proc.
3. 3. 80.	22'	152,8	18,47	88,12	87,13	5,01	5,8
		801,5	65,82	82,12			
		148,5	12,78	86,15			
8. 3. 80.	23.	152,3	14,35	94,23	91,27	6,09	6,7
		772,0	65,77	85,18			
		159,2	14,05	88,30			
9. 3. 80.	23.	150,2	12,68	84,48	81,09	5,04	6,2
		769,2	58,52	76,05			
		160,2	12,45	77,69			
		791,7	56,48	71,37			

Die Ausflussgeschwindigkeit betrug:

bei 22' für  $p = 148,0$  mm 3,308 Meter/Sec.

813,9 8,418

„ 23' „ „ 170,9 „ 3,181 „

777,5 7,502 „

was sich ziemlich nahe an die Verhältnisse der Edlund'schen Versuche anschliesst.

Während nun aber Hr. Edlund Abweichungen von der Proportionalität bis zu 16 und 17 Proc. erhält, erreichen diese bei mir im Mittel etwa 6 Proc., sodass ich also auch für ziemlich grosse Änderungen des Druckes die electromotorische Kraft demselben noch nahe proportional finde. Noch grössere Druckdifferenzen bedingen vielleicht eine Änderung der Art der Strömung und eine bedeutendere Abweichung von der Proportionalität.

Leider gibt Hr. Edlund nirgends an, dass er die oben erwähnte Druckcorrection wegen der Niveaudifferenz des Wassers angebracht hat. Ihre Vernachlässigung würde ausreichen, um die Differenz unserer Resultate zu erklären, möglicherweise führt dieselbe aber von einer Verschiedenheit der Strömungsverhältnisse in unseren Röhren her.

22. Was Hr. Helmholtz über die Gründe der Unregelmässigkeit der Erscheinungen auf dem Gebiete der Reibungselectricität ausführt<sup>1)</sup>, kann auch zur Erklärung der starken Änderungen dienen, denen die durch strömendes Wasser in Röhren erzeugte electromotorische Kraft im Laufe der Zeit, wie auch durch geringe Änderungen der Behandlung unterworfen ist.

1) Helmholtz, Wied. Ann. 7, p. 344. 1879.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. X.

Die oberflächliche Schicht des Glases, welche über die Wirkung entscheidet, kann infolge theilweiser Auflösung durch das Wasser verändert, oder ihr etwa anhaftende fremde Stoffe fortgespült werden. Vielleicht dringt auch der dem Glase angehörige Theil der electrischen Doppelschicht mit der Zeit tiefer in dasselbe ein, wodurch eine Aenderung der Vertheilung in dem in das Wasser fallenden Theile derselben und demgemäß auch der electromotorischen Kraft eintreten könnte.

Andererseits wäre es aber auch nicht unmöglich, dass hier Aenderungen einer wenn auch geringen Gleitung des Wassers an der Glaswand mitwirken, welche, so klein auch ihr Einfluss auf die Bewegungsscheinungen des Wassers ist, doch die electrischen Vorgänge merklich modifiziren können. Letztere nämlich hängen von der Grösse  $\varphi_i - \varphi_a$   $+ l \frac{\partial \varphi}{\partial N}$  ab, und bei dem in der Nähe der Röhrenwand jedenfalls sehr grossen Werth von  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  würde schon eine kleine Variation der Gleitungsconstante  $l$  eine bedeutende Wirkung haben. Dass  $l$  jedenfalls für Wasser und Glas klein ist und bei der Berechnung der Strömungsvorgänge vernachlässigt werden kann, folgt aus den von Hrn. Helmholtz citirten Versuchen des Hrn. Quincke über Drucksteigerung durch electrische Diffusion<sup>1)</sup>, wie aus den bekannten Versuchen Poiseuille's über die Strömung durch Capillaren.

Ich erinnere daran, dass Röhren, welche durch Erhitzen in Schwefelsäure und Hindurchsaugen von heissem Wasser und trockener Luft gereinigt waren, zuerst einen geringen Werth der electromotorischen Kraft zeigten, der aber schnell anstieg, mitunter bis auf das Dreifache.

Falls dies Verhalten in einer Aenderung der Gleitung seinen Grund hätte, müsste gleich nach der Reinigung die Ausflusszeit desselben Volumens grösser ausfallen, als nach längerer Benetzung der Röhre. Folgende Versuche zeigen nun in der That wenigstens eine Andeutung eines solchen Verhaltens.

1) Quincke, Pogg. Ann. 113. p. 541 ff. 1861.

Benutzt wurde die Röhre 43 und eine andere aus dem Gehlberger Sortimente von 1 m Länge und 0,407 mm Durchmesser, welche letztere ich vor der Gebläselampe zu einer kurzen Spirale aufgerollt hatte. Beide genügen dem Poiseuilleschen Gesetze hinreichend, um die Beobachtungen jeder Reihe mit Hülfe desselben aufeinander reduciren zu können. Das zu den Versuchen verwendete destillirte Wasser war filtrirt und wurde vor denselben wenigstens eine Stunde in einem luftverdünnten Raum von 50—60 mm Druck gehalten. Vor jedem Versuche wurde das Wasser umgerührt; seine Temperatur gab ein direct in Zehntelgrade getheiltes Thermometer.

Die Röhre wurde mit Hülfe eines kurzen ungeschwefelten Gummischlauches so an dem untern Ende einer Pipette (Volumen 12622 cmm) befestigt, dass sie in den Pipettenhals hineinragte, und der Schlauch beiderseits mit Gummischnur festgebunden.

Vom andern Ende der Pipette führte ein Gummischlauch zu einem Gefässe, in dem Luft comprimirt oder verdünnt werden konnte, und das gross genug war, um die Druckschwankung während jedes Versuches 1 mm nicht überschreiten zu lassen. Bei allen Beobachtungen tauchte die ganze Capillare in das Becherglas, bei denen mit Ueberdruck auch der Körper der Pipette, welche im letztern Falle kurz vorher aus demselben gefüllt wurde.

Der Druck wurde an einem Manometer mit Theilung auf der Röhre abgelesen, und zwar zur Rechnung die (wegen der Niveaudifferenz des Wassers corrigirte) Angabe desselben für die Mitte der Versuchsdauer benutzt.

Die Pipette hatte beiderseits von der Erweiterung Marken und beobachtet wurde die Zeit, während deren sich das Volumen zwischen ihnen mit Wasser füllte, resp. entleert wurde. Um der Zeitbestimmung grössere Schärfe zu geben, geschah dieselbe durch zwei Beobachter gleichzeitig: Hr. Cand. P. Schuster beobachtete mit blossem Auge nach einem halbe Secunden schlagenden Chronometer, ich selbst nach einer Pendeluhr mit dem Fernrohr.

Die oberflächliche Schicht des Glases, welche über die Wirkung entscheidet, kann infolge theilweiser Auflösung durch das Wasser verändert, oder ihr etwa anhaftende fremde Stoffe fortgespült werden. Vielleicht dringt auch der dem Glase angehörige Theil der electrischen Doppelschicht mit der Zeit tiefer in dasselbe ein, wodurch eine Aenderung der Vertheilung in dem in das Wasser fallenden Theile der selben und demgemäß auch der electromotorischen Kraft eintreten könnte.

Andererseits wäre es aber auch nicht unmöglich, dass hier Aenderungen einer wenn auch geringen Gleitung des Wassers an der Glaswand mitwirken, welche, so klein auch ihr Einfluss auf die Bewegungsscheinungen des Wassers ist, doch die electrischen Vorgänge merklich modifiziren können. Letztere nämlich hängen von der Grösse  $\varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N}$  ab, und bei dem in der Nähe der Röhrenwand jedenfalls sehr grossen Werth von  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  würde schon eine kleine Variation der Gleitungsconstante  $l$  eine bedeutende Wirkung haben. Dass  $l$  jedenfalls für Wasser und Glas klein ist und bei der Berechnung der Strömungsvorgänge vernachlässigt werden kann, folgt aus den von Hrn. Helmholtz citirten Versuchen des Hrn. Quincke über Drucksteigerung durch electrische Diffusion<sup>1)</sup>, wie aus den bekannten Versuchen Poiseuille's über die Strömung durch Capillaren.

Ich erinnere daran, dass Röhren, welche durch Erhitzen in Schwefelsäure und Hindurchsaugen von heissem Wasser und trockener Luft gereinigt waren, zuerst einen geringen Werth der electromotorischen Kraft zeigten, der aber schnell anstieg, mitunter bis auf das Dreifache.

Falls dies Verhalten in einer Aenderung der Gleitung seinen Grund hätte, müsste gleich nach der Reinigung die Ausflusszeit desselben Volumens grösser ausfallen, als nach längerer Benetzung der Röhre. Folgende Versuche zeigen nun in der That wenigstens eine Andeutung eines solchen Verhaltens.

1) Quincke, Pogg. Ann. 113. p. 541 ff. 1861.

Benutzt wurde die Röhre 43 und eine andere aus dem Gehlberger Sortimente von 1 m Länge und 0,407 mm Durchmesser, welche letztere ich vor der Gebläselampe zu einer kurzen Spirale aufgerollt hatte. Beide genügen dem Poiseuille'schen Gesetze hinreichend, um die Beobachtungen jeder Reihe mit Hülfe desselben aufeinander reduciren zu können. Das zu den Versuchen verwendete destillirte Wasser warfiltrirt und wurde vor denselben wenigstens eine Stunde in einem luftverdünnten Raum von 50—60 mm Druck gehalten. Vor jedem Versuche wurde das Wasser umgerührt; seine Temperatur gab ein direct in Zehntelgrade getheiltes Thermometer.

Die Röhre wurde mit Hülfe eines kurzen ungeschwefelten Gummischlauches so an dem untern Ende einer Pipette (Volumen 12622 cmm) befestigt, dass sie in den Pipettenhals hineinragte, und der Schlauch beiderseits mit Gummischnur festgebunden.

Vom andern Ende der Pipette führte ein Gummischlauch zu einem Gefässe, in dem Luft comprimirt oder verdünnt werden konnte, und das gross genug war, um die Druckschwankung während jedes Versuches 1 mm nicht überschreiten zu lassen. Bei allen Beobachtungen tauchte die ganze Capillare in das Becherglas, bei denen mit Ueberdruck auch der Körper der Pipette, welche im letztern Falle kurz vorher aus demselben gefüllt wurde.

Der Druck wurde an einem Manometer mit Theilung auf der Röhre abgelesen, und zwar zur Rechnung die (wegen der Niveaudifferenz des Wassers corrigirte) Angabe desselben für die Mitte der Versuchsdauer benutzt.

Die Pipette hatte beiderseits von der Erweiterung Marken und beobachtet wurde die Zeit, während deren sich das Volumen zwischen ihnen mit Wasser füllte, resp. entleert wurde. Um der Zeitbestimmung grössere Schärfe zu geben, geschah dieselbe durch zwei Beobachter gleichzeitig: Hr. Cand. P. Schuster beobachtete mit blossem Auge nach einem halbe Secunden schlagenden Chronometer, ich selbst nach einer Pendeluhr mit dem Fernrohr.

Fände keine Gleitung statt, so wäre nach Hrn. O. E. Meyer das in der Zeit  $t$  ausfliessende Volumen:

$$V = \frac{\pi D^4}{2^5 L} p \cdot t \cdot \frac{1 + 0,03315 T + 0,0002437 T^2}{1,755}.$$

Nenne ich den dreigliedrigen Term des Zählers  $n$ , so würde in meinen Versuchen  $ptn$  constant werden müssen, und eine Verkleinerung dieses Productes würde auf den Einfluss einer Gleitung schliessen lassen. Da es sich nur um Proportionalität handelt, kann man  $p$  auch in mm Quecksilber angeben. In folgender Zusammenstellung einiger Versuche sind die nach Reinigung der Röhre eingeklammert.

Datum Röhre	$p$ mm	$t$ Sec.	$T$ ° Cels.	$p \cdot t \cdot n$ $10^{-5}$	Mittel	Diff.
1. 12. 79. 43.	446,68 447,08 447,33 447,13 446,28 446,78 447,73 447,48	345,72 345,05 345,55 345,55 346,40 345,55 344,90 344,40	10,134 10,145 10,134 10,138 10,156 10,180 10,182 10,206	2,1017 2,1002 (2,1038) 2,1030 (2,1052) 2,1038 (2,1045) 2,1016	(2,1045 $\pm 0,0005$ ) — — $\pm 0,0011$ — — —	0,0024 — — — — — — —
5. 12. 79. Spirale	446,78 448,08 447,43 447,93 447,48	507,05 505,28 505,65 504,40 504,45	9,320 9,365 9,390 9,434 9,501	3,0131 3,0153 (3,0154) 3,0149 (3,0180)	(3,0167 $\pm 0,0013$ ) — 3,0144 $\pm 0,0009$	0,0023 — — — —
23. 12. 79. <sup>1)</sup> 43.	441,24 441,24 441,44 441,49 442,24 441,64 441,44	376,52 375,57 375,15 374,25 373,00 373,00 373,33	8,410 8,475 8,519 8,605 8,650 8,665 8,690	2,1531 2,1516 (2,1531) 2,1534 (2,1527) 2,1506 (2,1531)	(2,1530 $\pm 0,0002$ ) — 2,1522 $\pm 0,0011$ — —	0,0008 — — — — — —
24. 12. 79. <sup>1)</sup> 43.	443,69 443,54 445,09 443,24 445,09 444,44	372,45 373,12 371,28 372,55 371,35 371,40	8,600 8,598 (2,1564) 8,604 (2,1537) 8,613 8,603 (2,1540) 8,603	2,1534 $\pm 0,0011$ 2,1525 $\pm 0,0010$ — —	(2,1547 $\pm 0,0011$ ) — — — —	0,0022 — — — — —

Die Abweichung der zusammengehörigen  $ptn$  vom Mittel beträgt noch nicht  $1/20$  Proc.; um diese hervorzu bringen, ge-

1) Hier wurde eine andere Pipette benutzt und dieselbe entleert, während in den ersten beiden Reihen das Wasser hineingesogen wurde.

nügt ein Irrthum von 0,2 mm in  $p$ , 0,008° in  $T$  und 0,15 Sec. in  $t$ .

Die kleine, aber regelmässig wiederkehrende Abnahme von  $ptn$  weist auf eine Gleitung nach etwas längerer Benetzung hin.

Versuche, bei denen das Reinigungsverfahren ähnlich war, nur dass das heisse Wasser mit einer Spritzflasche durch die Röhren getrieben wurde, gaben nicht übereinstimmende Resultate; bei den besten Versuchsreihen liess eine längere Benetzung keinen Unterschied in  $ptn$  hervortreten, und hiermit parallel geht auch eine ziemlich geringe Aenderung der electromotorischen Kraft mit der Zeit.

23. Versuche von Hrn. C. Freund<sup>1)</sup> über Zinksulfatlösungen, bei denen die Flüssigkeitsmenge bestimmt wurde, welche ein galvanischer Strom durch eine Thonzelle trieb, gestatten eine Berechnung des „electrischen Momentes“ nach nach der Formel (3 a) von Hrn. Helmholtz<sup>2)</sup>:

$$U_1 = \frac{\sigma J}{4 \pi k^2} \left[ \varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right]$$

woraus unter der Annahme  $l = 0$ :

$$\varphi_i - \varphi_a = U_1 \frac{4 \pi k^2}{\sigma J}.$$

Hierin ist  $U_1$  das in einer Secunde ausgeflossene Volumen,  $k^2$  die Reibungsconstante,  $\sigma$  der specifische Widerstand und  $J$  die Stromstärke in electrostatischem Maasse. Hr. Freund gibt nun statt  $k^2$  die nach Beobachtungen von Hrn. Grotian<sup>3)</sup> berechnete Fluidität:

$$f = \frac{1,3092}{k^2},$$

worin 1,3092 die Reibungsconstante für Wasser von 10° bedeutet. Im Folgenden habe ich die Fluidität von 18° auf die Temperatur des Versuchs umgerechnet.

Um die in electromagnetischem Maasse gemessene Stromstärke  $J$  in electrostatische Einheiten zu übertragen<sup>4)</sup>, ist sie

1) Freund, Wied. Ann. 7. p. 59. 1879.

2) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 354. 1879.

3) Grotian, Pogg. Ann. 160. p. 263. 1877.

4) s. Bd. 9. p. 529.

mit  $v = 28,565 \cdot 10^{10}$  zu multipliciren. Da Hr. Freund die specifische Leistungsfähigkeit auf Quecksilber =  $10^8$  bezieht, so findet man aus der von ihm mit  $k$  bezeichneten Grösse  $\frac{1}{\sigma}$  in electrostatischem Maasse durch Division mit  $1,1704 \cdot 10^{-8}$ .

1 Daniell ist = 11,71 Siemens. Weber =  $\frac{11,71 \cdot 0,9550 \cdot 10^{10}}{28,565 \cdot 10^{10}} = 0,3915$  electrostatischen Einheiten.

Somit erhält man:

$$\varphi_i - \varphi_a = \frac{U_1 \cdot 4 \pi \cdot 1,3092}{\sigma J f \cdot 1,1704 \cdot 10^{-8} \cdot 28,565 \cdot 10^{10} \cdot 0,3915} = \frac{U_1}{\sigma J f} \cdot 0,012569$$

Daniell, worin für  $\frac{U_1}{J}$ ,  $\frac{1}{\sigma}$ ,  $f$  die von Hrn. F. angegebenen Zahlenwerthe zu setzen sind.

In folgende Zusammenstellung nehme ich noch einige Zahlen aus Hrn. Freund's Dissertation auf, die im Auszuge nicht mitgetheilt sind:

Spec. Gew.	Salzgehalt	Temp.	$\frac{U_1}{J}$	$f$	$\frac{1}{\sigma}$	$\varphi_i - \varphi_a$
1,0996	9,22	16,74	0,2747	0,8098	281,7	1,139
1,1620	14,42	17,91	0,1686	0,6280	386,2	1,334
1,2057	17,76	17,88	0,1442	0,5064	431,2	1,543
1,3183	25,72	18,14	0,1221	0,2871	468,2	2,503

Die Werthe des electrischen Momentes für Thon und Zinksulfatlösungen nehmen also mit wachsender Concentration erst langsam, dann schnell zu.

24. Bekanntlich werden Theilchen, die in einer Flüssigkeit suspendirt sind, durch einen dieselbe durchfliessenden galvanischen Strom bewegt, und zwar in Wasser gegen die Richtung des positiven Stroms.

Man durfte nach einem allgemein gültigen Prinzip die reciproke Erscheinung erwarten, also einen galvanischen Strom bei Bewegung fremder Theilchen durch eine Flüssigkeit.

Ströme dieser Art gelang es mir nun in der That nachzuweisen, wie aus folgenden Beobachtungen hervorgeht.

Eine Röhre von 480 mm Länge und 10,9 mm Durchmesser war mit zwei seitlichen Ansätzen in der Entfernung von 353 mm versehen, in denen Platinelectroden befestigt

waren. Dieselbe wurde bis etwa zu  $1/4$  mit grossen Perlen von durchsichtigem Glase, dann mit destillirtem Wasser gefüllt und so verschlossen, dass keine Luft darin blieb.

Der so vorgerichtete Apparat wurde vertical an einem Stative befestigt, welches eine schnelle Drehung desselben um eine horizontale Axe erlaubte, und die Electroden mit dem Plath'schen Galvanometer verbunden.

Wurde die Röhre schnell umgekehrt, so fielen die Perlen dem andern Ende zu, und das Galvanometer zeigte einen ihrer Bewegung entgegengesetzten Strom an.

Es seien die Electroden bezeichnet mit 1 und 2 und der entsprechende Index deute eine Bewegung auf die betreffende Electrode an;  $a_1$ ,  $a_3$  seien die Ablenkungen von der Ruhelage vor der Bewegung,  $a'_1$ ,  $a'_2$  von der nach derselben eintretenden aus gerechnet.

Ich erhielt: 12. Juli 1878.

$a_1$	$a'_1$	$a_2$	$a'_2$
- 0,9	- 1,0	+ 1,0	+ 1,5
- 1,2	- 1,4	+ 1,7	+ 2,1
- 1,8	- 1,3	+ 1,7	+ 0,9
Mittel	- 1,30	- 1,23	+ 1,47
			+ 1,50

Das Mittel der absoluten Werthe der  $a$  beträgt 1,38.

Spätere Beobachtungen zeigten eine Abnahme mit der Zeit; so war nach vier Tagen das Mittel 0,63.

Weit stärker waren die Ströme bei Benutzung von sorgfältig ausgewaschenem Seesand in einer ähnlichen grössern Röhre (Länge 590 mm, Durchmesser 16,2 mm, Entfernung der Electroden 398 mm).

22. Juli 1878. Mit frischem Wasser:

$a_1$	$a'_1$	$a_2$	$a'_2$
- 7,7	- 8,6	+ 6,8	+ 9,2
- 6,5	- 7,9	+ 7,5	+ 8,3
- 7,3	- 8,0	+ 6,7	+ 9,1
Mittel	- 7,17	- 8,17	+ 7,00
			+ 8,87

Mittel der absoluten Werthe: 7,80.

10 Minuten später:

$a_1$	$a_1'$	$a_2$	$a_2'$
- 6,2	- 8,1	+ 6,4	+ 7,4
- 6,0	- 7,4	+ 5,7	+ 7,0
- 6,2	- 7,4	+ 6,7	+ 7,2
Mittel	- 6,18	- 7,63	+ 6,27
			+ 7,20

Mittel der absoluten Werthe: 6,80.

Eine Vergleichung der  $a_1$  und  $a_2$  mit  $a_1'$  und  $a_2'$  zeigt hier bereits deutlich einen Polarisationsstrom; ferner ist eine Abnahme im Laufe der Zeit zu bemerken.

Aehnliche Beobachtungen habe ich noch mehrfach gemacht.

Ich will hier gleich zwei Einwändern begegnen, welche gegen meine Deutung dieser Ströme als Folge der Bewegung der Theilchen erhoben werden könnten.

Dass man es nicht einfach mit Polarisationsströmen, verursacht durch die Veränderung der Umgebung der Electroden, zu thun hat, geht schon daraus hervor, dass nach Aufhören der Bewegung der Theilchen das Galvanometer fast genau zu seiner ursprünglichen Lage zurückkehrte. Eine Polarisierung wäre nicht so schnell verschwunden.

Noch überzeugender ist der unmittelbare Vergleich der Bewegung der (beiläufig überaperiodischen) Galvanometer-nadel mit dem Niedersinken der Perlen und des Sandes, wo die directe Beziehung sofort sich herausstellt.

Auch Vorgänge an der Röhrenwand können nur wenig an der Erzeugung dieser Ströme betheiligt sein. Wie ein Vergleich mit den früher besprochenen Erscheinungen zeigt, ist die Geschwindigkeit des Wassers, welches den Theilchen nach oben ausweicht, viel zu gering, um Ströme der beobachteten Intensität zur Folge zu haben; auch müssten dann die schneller fallenden Perlen stärker wirken als der Sand.

Vielmehr würde die Erklärung dieser Erscheinungen auf Grundlage der Quincke-Helmholtz'schen Anschauungen<sup>1)</sup> etwa folgende sein.

1) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 368. 1879.

Die Körperchen sind negativ, die sie unmittelbar umgebende Wasserschicht positiv electricisch, infolge der Bewegung bleiben + geladene Wassertheilchen zurück, während die negative Electricität auf der vorangehenden Seite des Körperchens dem durchlaufenen Wasser positive Electricität entzieht und negative frei macht. Die frei gewordenen Electricitäten vereinigen sich durch das Wasser und den Galvanometerdraht.

Die Arbeit zur Erzeugung dieser Ströme wird also durch die Wirkung der Schwere auf die Körperchen geleistet.

25. Durch eine briefliche Mittheilung von Hrn. J. W. Clark wurde ich auf eine ältere eigene Beobachtung wieder aufmerksam gemacht, die ich hier anführen will, da sie in enger Beziehung zu andern lange bekannten Erscheinungen steht.

Bei meinen Versuchen über die durch den Wasserstrom in weiteren Röhren erzeugte electromotorische Kraft kam es mitunter vor, dass während einer Beobachtung der Wasservorrath im Ballon zu Ende ging, und ein Gemisch von Wasser und Luft in unregelmässigen Stößen durch die Röhre getrieben wurde. Es trat sodann stets eine heftige und schwankende Ablenkung des Galvanometers ein, welche sich leicht als eine Folge der Fortreissung der mit dem Glase in unmittelbarer Berührung stehenden stark positiv electricischen Wasserschichten erklärt.

In die Augen fallend ist die Analogie dieser Erscheinung mit der besonders von Faraday studirten Electricitätsereggung durch Fortreissung von Flüssigkeitstheilchen mittelst ausströmenden Dampfes. Letzterer ist nur das Mittel, die, durch Contact mit der Wand electricisch gewordenen Partikelchen der Flüssigkeit von dieser zu trennen und fortzuführen, da ja trockner Dampf keine Electricität liefert.

26. Vorstehende Untersuchung hat also ergeben:

1) In Uebereinstimmung mit der Helmholtz'schen Theorie ist die durch strömendes Wasser in Capillaren erzeugte electromotorische Kraft von dem Querschnitt (und der Länge) derselben unabhängig.

2) Der aus dieser electromotorischen Kraft hergeleitete

Werth des „electrischen Momentes“ für Wasser und Glas (3,936 Daniell) entspricht nahe dem, welchen Hr. Helmholtz aus Beobachtungen von Hrn. Quincke über die Fortführung des Wassers in Glasröhren durch den electrischen Strom berechnet.

3) Zu einem wenig verschiedenen Werthe führte auch die Beobachtung des electrischen Stromes, der durch fliessendes Wasser in Capillaren entsteht.

4) Röhren, welche nicht mehr dem Poiseuille'schen Gesetze genügen, weichen in der Weise ab, dass die nach Formel (11b)<sup>1)</sup> von Hrn. Helmholtz berechneten Werthe des electrischen Momentes ziemlich langsam mit wachsendem Röhrendurchmesser abnehmen, hingegen die nach (14d) erhaltenen sehr schnell viel zu gross ausfallen.

5) Empirisch hat sich für weitere Röhren innerhalb ziemlich ausgedehnter Grenzen die bei einer bestimmten mittlern Geschwindigkeit des strömenden Wassers auftretende Stromstärke nahezu dem Radius der Röhre proportional ergeben, was mit Hinzuziehung einer plausiblen Annahme aus der Theorie von Hrn. Helmholtz folgt.

6) Beiläufig hat sich gezeigt, dass der Depolarisator zur Bestimmung des Potentials einer Drahtspirale auf sich selbst, sowie zur Untersuchung sehr schwacher Ladungsvorgänge dienen kann.

7) Spuren einer Gleitung des Wassers an der Glaswand, welche bei Messung der durch eine Capillare ausfliessenden Wassermenge sich zeigten, wirken vielleicht bei den Aenderungen der electromotorischen Kraft mit, die im Laufe der Zeit etc. eintreten.

Möglichen Falls lassen aber meine Ausflussversuche eine andere Deutung zu.

8) Nach Beobachtungen von Hrn. Freund ist das electrische Moment für gebrannten Thon und Zinksulfatlösung berechnet.

9) Durch Bewegung materieller Theilchen in einer Flüssigkeit entsteht ein electrischer Strom.

1) Hr. Helmholtz hebt ausdrücklich hervor, dass beide Formeln nur für Capillaren gelten.

2) Gren  
klärung  
führungen  
steigerung  
electrische  
setze

3) I  
ergab  
oben

4) Einw  
Erörter  
mals  
tere  
gebe  
Theore  
Resul  
anerk  
portio  
keit d

5) I  
in ih  
nicht

6) Mits  
so w  
müss  
begeb  
ist.  
motor  
haben  
könn

1)  
2)  
3)  
4)

27. Hr. Helmholtz hat in den „*Studien über electrische Grenzschichten*“ die von Hrn. Quincke angedeutete Erklärung dieses ganzen Gebietes von Erscheinungen (Fortführung der Electricität durch strömende Flüssigkeit in Röhren und Diaphragmen, electrische Diffusion und Drucksteigerung, Bewegung suspendirter Theilchen durch den electrischen Strom) schärfer präcisirt und daraus die Gesetze einer ganzen Reihe von Fällen theoretisch hergeleitet.

Eine Vergleichung mit den experimentellen Resultaten ergab durchgehends Uebereinstimmung, und ich selbst habe oben noch einige neue Bestätigungen der Theorie geliefert.

Die von Hrn. Edlund<sup>1)</sup> gegen die dieselbe erhobenen Einwendungen erachte ich für nicht stichhaltig, will ihre Erörterung aber Hrn. Helmholtz überlassen und nur nochmals darauf hinweisen, dass meine Beobachtungen für weitere Röhren die Stromstärke dem Radius proportional ergeben, hier also kein Widerspruch gegen die Helmholtz'sche Theorie vorliegt. Die Art freilich, wie Hr. Edlund dies Resultat aus derselben herleitet, kann ich nicht als richtig anerkennen, wie denn auch die gleichzeitig gefolgerte Proportionalität der Stromstärke mit der mittlern Geschwindigkeit des Wassers nicht stattfindet.

Die Theorie des Hrn. Edlund vermag hingegen, auch in ihrer modifizirten Gestalt<sup>2)</sup>, von mehreren Erscheinungen nicht Rechenschaft zu geben.

Wenn nämlich der primäre Grund der Erscheinung die Mitschleppung des Aethers durch den Flüssigkeitsstrom ist, so wird diese auch im freien Wasserstrahle stattfinden müssen, die freie Electricität wird sich auf die Oberfläche begeben und dort erhalten bleiben, da ja Luft ein Isolator ist. Auch ein freier Wasserstrahl müsste somit eine electro-motorische Kraft zeigen, aber ich selbst<sup>3)</sup> wie Hr. Elster<sup>4)</sup> haben eine solche mit unseren Instrumenten nicht constatiren können.

1) Edlund, *Wied. Ann.* 9. p. 95. 1880.

2) Edlund, *Wied. Ann.* 8. p. 113 ff. 1879.

3) Dorn, *Wied. Ann.* 5. p. 29 ff. 1878.

4) Elster, *Wied. Ann.* 6. p. 558. 1879.

Vollends unbegreiflich aber bleibt die Möglichkeit eines gegen die Flüssigkeitsbewegung gerichteten electrischen Stromes, den Hr. Quincke<sup>1)</sup> und ich<sup>2)</sup> wiederholt beobachtet haben. Mit Zuhilfenahme einer Einwirkung der Röhrenwand wird auch nichts gewonnen, da diese zwischen der oberen und untern Electrode homogen war.

Die umgekehrte Erscheinung, die Fortführung von Flüssigkeiten und suspendirten Theilchen durch strömende Electricität würde nach Hrn. Edlund als eine Mitschleppe der Materie durch den Aetherstrom aufzufassen sein. Dieser Auffassung stellen sich zunächst ganz ähnliche Schwierigkeiten entgegen, wie u. a. Terpentinöl und ein unreiner Alkohol sich gegen den positiven Strom bewegten, und auch die von Hrn. Quincke beobachteten Einzelheiten bleiben unerklärlich. Man sieht z. B. nicht ein, warum die Flüssigkeitsbewegung in der Nähe der Wand am stärksten ist, wo sie doch gerade durch die Reibung gehemmt sein sollte.

Die einzige Annahme, welche von allen diesen Vorgängen ungezwungen Rechenschaft gibt, ist eben die Quincke-Helmholtz'sche, welche die Electricität, die nach Umständen + oder - sein kann, schon in der ruhenden Flüssigkeit längs ihrer Berührungsfläche mit der Wand voraussetzt.

Ich glaube nicht, dass diese Hypothese durch die unitarische Theorie ausgeschlossen ist; andererseits kann auch eine Fortführung des Aethers in dem von Hrn. Edlund angenommenen Sinne stattfinden, aber die hier betrachteten Erscheinungen haben in derselben nicht ihren Grund.

Breslau, den 9. Februar 1880.

#### Zusatz von H. Helmholtz.

Durch gütige Mittheilung von Hrn. E. Dorn bin ich in den Stand gesetzt, folgende Rechnungs- und Druckfehler, die in meiner Abhandlung Bd. 7 der Annalen stehen geblieben sind, zu verbessern:

1) Quincke, Pogg. Ann. 113. p. 513 ff. 1861.

2) Dorn, Wied. Ann. 5. p. 39. 1878.

1)  
1,555 s  
auf S. 1  
also etw

2)  
 $\frac{x J \sigma}{Q}$  g

Rechmu  
3)  
Zähler

4)

V. U  
Bezie

(A

D  
Glasp  
schlag  
erhalt  
tungen  
mich  
bevor  
somit  
sam s  
ausget  
von V  
dersel  
Gord  
wurde  
gelang  
einem  
obach  
statiore  
durch  
und

1) S. 357 Z. 11 v. u. ist der Werth von  $k_0^2$  falsch angegeben. Statt 1,555 sollte es heissen  $1,778 : 1,555 = 1,1485$ . Demnach sind in der Tabelle auf S. 358 die Werthe von  $q_i - q_a$  alle im Verhältniss  $1,36 : 1$  zu gross, also etwa um ein Viertel zu vermindern.

2) S. 353 Z. 2 v. u., S. 354 Z. 2 v. o. und ebenda Z. 11 ist  $\frac{xQ}{J\sigma}$  statt  $\frac{xJ\sigma}{Q}$  gesetzt. Die betreffende Grösse hebt sich aus dem Resultat der Rechnung fort.

3) S. 366 Z. 13 v. o. ist in dem Werthe von  $W_{12}$  Nenner und Zähler vertauscht.

4) S. 374 Gl. (13a). Vor  $\mu u$  ist ein minus-Zeichen zu setzen.

---

**V. Ueber die von Herrn Kerr gefundene, neue Beziehung zwischen Licht und Electricität; von W. C. Röntgen.**

(Aus den Ber. d. Oberhess. Gesellsch. f. Natur- u. Heilk. 19.)

---

Die Beobachtung der bekannten Erscheinung, dass eine Glasplatte, welche von einem electricischen Funken durchschlagen worden ist, optisch doppelbrechende Eigenschaften erhalten hat, sowie einige sich daran knüpfende Betrachtungen über die Natur der dielectrischen Polarisation führten mich im Jahre 1873 zu der Fragestellung, ob wohl schon bevor die Entladung durch das Glas stattfindet, während somit starke electrische Kräfte auf die Glastheilchen wirksam sind, eine ähnliche Wirkung auf durchgehendes Licht ausgeübt werden sollte. Es wurde infolge dessen eine Reihe von Versuchen mit Glasplatten angestellt, fast genau in derselben Weise, wie dieselben später von Hrn. Kerr, Gordon und Mackenzie ausgeführt und veröffentlicht wurden. Allein ich erhielt blos negative Resultate und gelangte überdies bald zu der Ansicht, dass, wenn auch in einem festen Körper eine derartige Doppelbrechung beobachtet wäre, es immerhin sehr schwer sein würde, zu constatiren, dass dieselbe nicht von ohne Zweifel vorhandenen, durch die electricischen Ladungen erzeugten mechanischen und thermischen Veränderungen des Körpers herrühren.

Nachdem auch einige Versuche mit Canadabalsam als Dielectricum negative Resultate geliefert hatten, beschäftigte ich mich nicht mehr mit diesem Gegenstande.

Bald nachher erschienen die ersten Versuche des Hrn. Kerr<sup>1)</sup>, welche das Vorhandensein der von mir gesuchten Doppelbrechung zeigten und die durch Hrn. Maxwell, resp. Helmholtz veranlassten Untersuchungen der Hrn. Gordon<sup>2)</sup> und Mackenzie.<sup>3)</sup> Da es den beiden letzteren nicht gelang, die Kerr'sche Erscheinung in Glas zu erhalten, so wurde ich in meiner nach dem Lesen der Kerr'schen Abhandlung gefassten Meinung bestärkt, dass bei jenen Versuchen irgend welche nebensächliche Einflüsse thätig gewesen wären.

Im Spätjahr 1879 sind nun von Hrn. Kerr neue Untersuchungen veröffentlicht<sup>4)</sup>, die den Nachweis liefern, dass in einer grossen Zahl von schlecht leitenden Flüssigkeiten durch Electricität Doppelbrechung erzeugt werden kann; es sei mir gestattet, das Wesentlichste derselben hier mitzutheilen. Die zu untersuchende Flüssigkeit befindet sich in einem Glasgefässe, welches im Lichten 2,5 cm hoch, 1,6 cm breit und 1,8 cm tief ist. Zwei parallele, verticale Seitenwände bestehen aus 0,15 cm dicken Spiegelglasstücken; das durch ein Nicol geradlinig polarisierte Licht einer Paraffinlampe geht senkrecht zu diesen Platten durch die Flüssigkeit und wird durch ein zweites Nicol analysirt. Die Mitte der zwei übrigen, verticalen Seitenwände ist durchbohrt, in jeder Durchbohrung steckt als Zuleiter der Electricität ein Messingdraht, der in dem Gefäss in einer Kugel von 0,6 cm Durchmesser endigt. Die einander genau gegenüber liegenden, stark abgeplatteten Flächen der Kugeln sind um 0,3 cm voneinander entfernt und begrenzen nach rechts und nach links das von Hrn. Kerr untersuchte electrische Feld.

Es schliesse nun der Hauptschnitt des Polarisators mit der Horizontalebene, somit auch mit den in der Mitte des

1) Kerr, Phil. Mag. (4). **50.** p. 337, 446. 1875.

2) Gordon, Phil. Mag. (5). **2.** p. 203. 1876.

3) Mackenzie, Wied. Ann. **2.** p. 356. 1877.

4) Kerr, Phil. Mag. (5). **8.** p. 85, 229. 1879.

electrischen Feldes verlaufenden Kraftlinien einen Winkel von  $45^{\circ}$  ein, der Analysator sei auf dunkel gestellt, und als Flüssigkeit habe man beispielsweise Schwefelkohlenstoff gewählt; wird alsdann die eine Kugel mit einer kräftigen Electricitätsquelle (einer Holtz'schen Maschine) in Verbindung gesetzt, während die andere zur Erde abgeleitet ist, so gewahrt man sofort eine beträchtliche Erhellung des Gesichtsfeldes, welche nicht etwa von einer Drehung der Polarisationsebene herrührt, sondern nach allen angestellten Versuchen blos durch eine in der Flüssigkeit stattgefundene Doppelbrechung entstanden sein kann.

Bis jetzt wurde von Hrn. Kerr diese Erscheinung bei 27 sehr schlecht leitenden Flüssigkeiten wahrgenommen und zwar wurde gefunden, dass dieselben in zwei Klassen, in positive und negative Flüssigkeiten zu theilen sind. Die positiven Flüssigkeiten verhalten sich wie Glasplatten, die in der Richtung der Kraftlinien gedehnt sind, die negativen dagegen wie Glasplatten, die in jener Richtung comprimirt sind. Die Intensität der doppelbrechenden Wirkung zeigte sich sehr verschieden bei verschiedenen Flüssigkeiten, am grössten war dieselbe bei  $CS_2$ ; ausserdem wurde nachgewiesen, dass die Intensität bei einer und derselben Flüssigkeit mit der Potentialdifferenz zwischen den beiden Kugeln zunimmt.

Wenn der Hauptschnitt des Polarisators vertical oder horizontal d. h. parallel oder senkrecht zu den Kraftlinien stand, so war entweder gar keine oder blos eine sehr undeutliche Wirkung zu beobachten.

Hr. Kerr glaubt schliesslich einen wesentlich andern Effect bei Nitrobenzol gefunden zu haben, indem diese Flüssigkeit erst dann doppelbrechende Eigenschaften erhält, wenn in die sonst ununterbrochene Verbindung der einen Kugel mit dem Conductor der Electrisirmschine eine Funkenstrecke eingeschaltet wird; bei jeder Entladung bemerkt man ein plötzliches Aufleuchten des Gesichtsfeldes.

Es sind nun diese Versuche, welche mich veranlassten, mich zum zweiten male mit der Sache zu beschäftigen, und

ich erlaube mir, im Folgenden die Resultate dieser Arbeit mitzutheilen.

Ich versuchte zu allererst die Kerr'sche Erscheinung zu reproduciren und construirte dazu aus Spiegelglasstücken ein parallelepipedisches Gefäss, im Lichten ungefähr 5 cm hoch, 2,5 cm breit und 2,5 cm tief; durch eine Durchbohrung des Bodens geht ein verticaler Messingdraht, welcher einerseits in dem Gefäss eine 1 cm dicke Kugel trägt, andererseits mit dem Conductor einer Winter'schen Electrisirmschine in Verbindung steht; von oben wird ein zweiter Messingdraht mit einer ebenfalls 1 cm dicken Kugel in das Gefäss hineingesteckt und durch ein Stativ so gehalten, dass der Abstand der senkrecht übereinander liegenden Kugeln 0,2 bis 0,3 cm beträgt. Die obere Kugel ist mit der Erde, resp. mit dem Reibzeug der Maschine verbunden. Das zwischen den Kugeln hindurch gehende Licht kam bei den ersten Versuchen von einer Natronflamme, der Hauptschnitt des Polarisators machte einen Winkel von  $45^{\circ}$  mit der Verticalen, und der Analysator war auf dunkel gestellt.

Nachdem das Gefäss mit Schwefelkohlenstoff gefüllt war, wurde die Electrisirmschine gedreht; meine Ueberraschung war nicht gering, als ich eine ausserordentlich intensive Erhellung des Gesichtsfeldes zwischen den beiden Kugeln eintreten sah. Diese Erhellung verschwand sofort beim Ableiten des Conductors zur Erde. Der Versuch liess sich beliebig oft wiederholen, die Erscheinung trat immer mit grosser Regelmässigkeit wieder ein.

Wurden die Hauptschnitte der Nicols um  $45^{\circ}$  gedreht, so war eine Wirkung der Electricität nicht erkennbar, ebenfalls nicht, wenn unpolarisirtes Licht durch die Flüssigkeit ging.

Ich schritt darauf zu einigen Aenderungen der Beobachtungsmethode, welche sich bald als wesentliche Verbesserungen herausstellten. Erstens wurde das Natronlicht durch Drummond'sches Kalklicht ersetzt und dadurch, wie zu erwarten war, die Empfindlichkeit der Methode bedeutend gesteigert. Zweitens wurde, um von einem möglichen Einfluss der Glaswände frei zu werden, das kleine Gefäss durch

eine w  
ersetzt.  
mit 3 c  
mittels  
sind.  
wenige  
bei die  
Einflüs  
eine D  
Electri  
Erde  
Licht g  
Glaspla

Ei  
von Ni  
licht, d  
Blicke  
auf die  
Electro

Di  
Auge u  
schen E

Vo  
nach d  
keit. H  
dass di  
linien u  
suchte  
zwische  
liegt, w

Di  
freiem  
gende C

1) A  
wie auch  
dieselben  
Electrode  
abgeschw

Ann. d.

eine weite, viereckige Glasflasche (12 cm hoch, 6 cm weit) ersetzt. Zwei einander gegenüberliegende Seitenwände sind mit 3 cm weiten, runden Oeffnungen versehen, welche durch mittelst Hausepblase aufgekittete Glasplatten verschlossen sind. Die Glasplatten wählte ich von dem sehr dünnen, wenige Zehntel Millimeter dicken Birminghamglas, um die bei dickeren Platten immer bemerkbare, durch mechanische Einflüsse erzeugte Doppelbrechung zu vermeiden. Durch eine Durchbohrung des Bodens der Flasche ist die mit der Electricitätsquelle verbundene und durch den Hals die zur Erde abgeleitete Electrode in die Flasche geführt. Das Licht geht unter senkrechter Incidenz durch die aufgekitteten Glasplatten hindurch.

Eine dritte, wesentliche Verbesserung ist die Anwendung von Nicols mit grossem Gesichtsfeld; es ist dadurch ermöglicht, die Erscheinung auf einem grossen Gebiete mit einem Blicke zu übersehen; man braucht sich nicht, w. Hr. Kerr, auf die Beobachtung eines kleinen, schmalen, zwischen den Electroden gelegenen Streifens zu beschränken.

Die Mitte der Flasche war meistens 25 bis 30 cm vom Auge und ungefähr 20 cm vom Diaphragma der Duboscq'schen Laterne entfernt.

Von besonderer Wichtigkeit erschien mir die Frage nach den Schwingungsrichtungen des Lichtes in der Flüssigkeit. Hr. Kerr hat, wie erwähnt, die Ansicht ausgesprochen, dass diese Schwingungsrichtung mit der Richtung der Kraftlinien und der dazu senkrechten zusammenfällt, er untersuchte aber blos den Theil des electrischen Feldes, welcher zwischen den abgeplatteten, nahezu ebenen Electrodenflächen liegt, wo somit alle Kraftlinien nahezu parallel verlaufen.

Die Flasche wurde mit möglichst reinem und staubfreiem<sup>1)</sup> Schwefelkohlenstoff gefüllt und den Electroden folgende Gestalten gegeben.

1) Auf die Entfernung fester Theilchen aus der Flüssigkeit muss, wie auch Hr. Kerr bemerkt, die grösste Sorgfalt verwendet werden, da dieselben sonst sofort eine relativ gut leitende Brücke zwischen den Electroden bilden und die eigentliche Erscheinung dadurch bedeutend abgeschwächt wird.

1) Die untere, mit dem Conductor der Electrisirmschine in directer Verbindung stehende Electrode ist eine horizontale, kreisrunde Messingscheibe von 1,8 cm Durchmesser und 0,8 cm Dicke. Die obere eine Messingkugel von 1 cm Durchmesser. Die Mittelpunkte der beiden liegen genau in einer Verticalen.

Taf. I Fig. 6 ist eine möglichst getreue Abbildung der Erscheinung, die beobachtet wird, wenn die Hauptschnitte der gekreuzten Nicols Winkel von  $45^{\circ}$  mit der Verticalen bilden, welche Stellung ich der Einfachheit wegen die Stellung I der Nicols nennen werde. Die Mitte des Gesichtsfeldes zwischen Kugel und Scheibe ist bei mässigem Drehen der Electrisirmschine so blendend hell geworden, dass die Helligkeit dem Auge öfters unerträglich wird; nach den Seiten zu nimmt dieselbe allmählich ab. Die dunklen Schwänze, die von der Kugel ausgehen, haben ihren Ursprung in Punkten, wo durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte unter  $45^{\circ}$  gegen die Verticale geneigte Geraden aus der Kugel austreten. Ebenso sind die von dem in Wirklichkeit eine Fläche von starker Krümmung bildenden Scheibenrand ausgehenden Schwänze an ihrem Ursprung unter  $45^{\circ}$  gegen die Verticale geneigt.

Es fragt sich, wodurch diese Vertheilung der hellen und dunklen Partien bedingt wird. Zur Beantwortung dieser Frage ist es von Wichtigkeit, die Bahn zu beobachten, welche unvermeidliche, immer hell leuchtende, in der Flüssigkeit suspendirte Theilchen beschreiben, während die Electrisirmschine gedreht wird. Solche Theilchen werden von der Kugel zur Scheibe und zurück geschleudert und verfolgen wenigstens nahezu die Richtung einer Kraftlinie. Man bemerkt nun immer, wenn diese Bahn in einer Ebene liegt, welche senkrecht steht zu den Lichtstrahlen, dass dieselbe und somit auch die betreffende Kraftlinie dort die erwähnten dunklen Schwänze schneidet, wo die Neigung der Bahn gegen die Verticale  $45^{\circ}$  beträgt; dass dagegen an den Stellen der Bahn, wo diese horizontal oder vertical ist, die grösste Helligkeit existirt.

Ein weiterer Aufschluss über die Natur der Erscheinung

wird erhalten, indem man mit Hrn. Kerr eine möglichst wenig doppelbrechende Glasplatte zwischen dem Analysator und der Flasche so aufstellt, dass die Lichtstrahlen die Platte unter senkrechter Incidenz treffen. Wird auf dieselbe durch eine geeignete Presse ein Druck in verticaler Richtung ausgeübt, so beobachtet man, dass während der Electrisirung die Partie zwischen den Schwänzen der Kugel und der Scheibe dunkler wird; dass dagegen die Stellen oberhalb jener Schwänze links und rechts von der Kugel, sowie die kleinen Stellen links und rechts von der Scheibe heller werden. Zu gleicher Zeit klappen die Schwänze, sowohl die oberen als die unteren, zusammen. Bei fortgesetztem Pressen vereinigen sich die unteren Enden der beiden Kugelschwänze, sodass sie das Ansehen einer an der Kugel hängenden Kette erhalten; dieselbe zieht sich bei noch weiter wachsendem Druck immer mehr gegen die Kugel zusammen, um endlich ganz zu verschwinden.

Selbstredend werden diese Vorgänge in umgekehrter Reihenfolge beobachtet, wenn man mit der Compression der Platte nachlässt.

Wird die eingeschaltete Glasplatte in horizontaler Richtung comprimirt, so finden gewissermassen die entgegengesetzten Erscheinungen statt. Die Mitte zwischen Kugel und Scheibe wird heller, dagegen die seitlichen Partien neben Kugel und Scheibe dunkler. Die Schwänze biegen sich auseinander.

Die Erscheinung ohne comprimirte Glasplatte ist wesentlich dieselbe bei langsamer und bei starker Drehung der Electrisirmaschine, im erstern Fall ist sie nur etwas weniger markirt und von geringerer Ausdehnung. Hat man durch eine horizontale Compression der Glasplatte vor der Electrisirung das Gesichtsfeld schwach erhellt und fängt nun an, die Maschine langsam zu drehen, so wachsen aus der Mitte des Gesichtsfeldes zwischen Kugel und Scheibe die zwei dunklen Streifen heraus und klappen bei zunehmender Potentialdifferenz immer weiter auseinander, erreichen aber nicht die Stellung, welche sie ohne comprimirte Glasplatte einnehmen. Eine Zunahme der Potentialdifferenz bei con-

stant bleibender Compression der Glasplatte hat somit den ähnlichen Erfolg wie eine Abnahme der Compression bei constant bleibender Potentialdifferenz.

Taf. I Fig 7 zeigt die Erscheinung, wenn die gekreuzten Haupt schnitte der Nicols horizontal, resp. vertical stehen (Stellung II der Nicols). Man bemerkt sofort, dass diejenigen Stellen, wo bei Stellung I der Nicols die grösste Helligkeit vorhanden war, jetzt am dunkelsten erscheinen, und dass umgekehrt die früher dunklen Theile des Gesichtsfeldes jetzt die hellen sind. Die beiden Figuren sind gewissermassen complementär. Die Kraftlinien durchschneiden jetzt die dunklen Partien, wo diese Linien vertical oder horizontal sind; dagegen ist dort die grösste Helligkeit vorhanden, wo die Neigung der Kraftlinien gegen die Verticale  $45^{\circ}$  beträgt.

Wie man sieht, ist die Taf. I Fig. 7 für den Vorgang ebenso charakteristisch als Taf. I Fig. 6 und wenn Hr. Kerr, wie oben erwähnt, bei der Stellung II keine Erhellung des Gesichtsfeldes beobachtet hat, so wird dieses erklärt durch die Beschränktheit des Gesichtsfeldes und durch den parallelen Verlauf der Kraftlinien.

Wie zu erwarten war, ändert die Compression einer eingeschalteten Glasplatte in horizontaler oder verticaler Richtung nichts an der Erscheinung, dagegen ist eine solche in einer Richtung, die  $45^{\circ}$  mit der Verticalen einschliesst, sofort wirksam. Die Figur wird unsymmetrisch, indem z. B. bei einer Compression die von rechts unten nach links oben gerichtet ist, das grosse helle Feld links von der Kugel und das kleine helle Feld an der rechten Kante der Scheibe heller werden und sich zu gleicher Zeit nach allen Richtungen vergrössern; die beiden anderen hellen Partien werden dunkler und kleiner.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass Uebergänge zwischen den Taf. I Fig. 6 und 7 leicht erhalten werden bei Stellungen der gekreuzten Nicols, welche zwischen den erwähnten liegen; die Figuren sind dann unsymmetrisch in Bezug auf die Mittellinie.

2) Die obere Electrode ist ein 0,2 cm dicker, gut abge-

rundeter Messingdraht, die untere eine Kugel von 1 cm Durchmesser.

Taf. I Fig. 8 gibt die bei Stellung I der Nicols beobachtete Erscheinung. Es hält nicht schwer, sich auch hier zu überzeugen, dass wiederum die hellsten Partien dort liegen, wo die Kraftlinien horizontal oder vertical verlaufen; die dunklen dagegen, wo die Neigung dieser Linien  $45^{\circ}$  beträgt.

Bei horizontaler Compression einer eingeschalteten Glasplatte wird der Theil zwischen der Spitz und der Kugel heller, die kleinen Felder links und rechts von der Spitz dunkler. Die Schwänze klappen nach oben gegen die Spitz. Eine Compression in verticaler Richtung hat dagegen das entgegengesetzte zur Folge. Die Schwänze biegen sich nach unten, lösen sich bei wachsender Compression von der Spitz ab und ziehen sich gegen die Kugel hin zusammen, um schliesslich zu verschwinden.

Taf. I Fig. 9 ist eine Darstellung der Erscheinung bei der Stellung II der Nicols. Taf. I Fig. 8 und 9 sind wieder complementär; die dunklen und hellen Partien sind nach derselben Regel vertheilt wie in Taf. I Fig. 2.

3) Beide Electroden sind Parallelepipede, Höhe 1,2 cm, Breite und Dicke 0,6 cm.

Taf. I Fig. 10 bezieht sich auf die Stellung I der Nicols. Abermals ist das Gesichtsfeld dort erhellt, wo die Kraftlinien horizontal oder vertical verlaufen und dunkel, wo die Neigung derselben  $45^{\circ}$  beträgt.

Bei horizontaler Compression einer eingeschalteten Glasplatte wird die Mitte heller, die neben den Parallelepipeden liegenden Seitenfelder dunkler. Die dunklen Büschel bewegen sich gegen die Seitenflächen der Parallelepiped, sowohl oben wie unten. Bei verticaler Compression wird die Mitte dunkler, die Seitenfelder heller, je zwei Büschel oben und unten vereinigen sich zu zwei dunklen, verticalen Bändern.

Taf. I Fig. 11 veranschaulicht die Verhältnisse bei der Stellung II der Nicols. Die Anordnung der hellen und dunklen Theile ist diejenige, welche zu erwarten war.

Ausser diesen Electroden wählte ich noch verschiedene anders gestaltete, ebenso beobachtete ich die Erscheinung

bei verschiedenen Stellungen der Electroden und in Gefässen von verschiedenen Weiten; immer konnte ich mich überzeugen, dass die gefundenen Gesetzmässigkeiten ohne Ausnahme zutreffen. Ich gelange somit zu den folgenden Resultaten.

*Aus der Vertheilung der hellen und dunklen Partien des Gesichtsfeldes bei den Stellungen I und II der Nicols, sowie den dazwischen liegenden folgt, dass das durch Schwefelkohlenstoff gehende Licht infolge von electricischen Kräften Veränderungen erleidet, welche den durch gewöhnliche Doppelbrechung erzeugten vollständig ähnlich sind; die Schwingungsrichtungen des Lichtes im Schwefelkohlenstoff fallen an jeder Stelle zusammen mit den Richtungen der durch diese Stellen gehenden Kraftlinien und den dazu senkrechten. Die Intensität dieser Doppelbrechung ändert sich von Stelle zu Stelle im electricischen Feld mit der electricischen Kraft und wächst mit der Potentialdifferenz zwischen den Electroden.*

*Die Versuche mit eingeschalteten und comprimirten Gläsern beweisen, dass Schwefelkohlenstoff sich unter dem Einfluss electricischer Kräfte verhält wie Glas, welches in der Richtung der Kraftlinien gedeht worden ist.*

Nachdem Schwefelkohlenstoff in eingehender Weise untersucht war, wählte ich als zweite Flüssigkeit Leberthran, eine von Hrn. Kerr ebenfalls geprüfte Substanz. Ich erhielt ähnliche, wenn auch nicht so intensive Erscheinungen wie mit Schwefelkohlenstoff und konnte die Entdeckung des Hrn. Kerr bestätigen, dass Leberthran sich in optischer Beziehung verhält wie Glas, welches in der Richtung der Kraftlinien *comprimirt ist*. *Die Classificirung der Flüssigkeiten in positive und negative ist somit durchaus gerechtfertigt.*<sup>1)</sup>

1) Das Dunkler- oder Hellerwerden des Gesichtsfeldes nach Compression der eingeschalteten Gläser kann nicht ohne weiteres allein entscheidend sein für das Verhalten der Flüssigkeiten; das Eintreffen des einen oder des andern Falles hängt doch bei gegebener Compressionsrichtung lediglich von der in der Flüssigkeit erzeugten Phasendifferenz der an einer Stelle austretenden Strahlen ab und diese ist nicht nur von der Natur der Doppelbrechung, sondern auch von der Intensität derselben und von der Dicke der doppelbrechenden Schicht abhängig. Ich habe mich nun auf verschiedenen Wegen überzeugt, dass bei meinen Ver-

Terpentin gab ebenfalls einen deutlich sichtbaren Effect.

Wie eingangs erwähnt, fand Hr. Kerr bei Nitrobenzol nur dann einen Effect, wenn die directe Verbindung der einen Electrode mit dem Conductor der Electrisirmschine durch eine Funkenstrecke unterbrochen und dadurch eine plötzliche Entladung der Electricität durch die Flüssigkeit hervorgerufen wurde. Ich glaube nun, dass man es hier mit keiner wesentlich neuen Erscheinung zu thun hat, und dass vielmehr die Nothwendigkeit einer derartigen Aenderung der Versuchs-anordnung blos durch die relativ gute Leitfähigkeit des Nitrobenzols bedingt wird. Ist nämlich die Electrode in directer Verbindung mit dem Conductor, so wird, wie der Versuch lehrt, die Electricität beim Drehen der Maschine so rasch durch die Flüssigkeit zur Erde abgeleitet, dass eine einigermassen bedeutende Potentialdifferenz zwischen den Electroden nicht zu Stande kommt. Schaltet man dagegen eine Funkenstrecke ein, so wird bei jeder Entladung eine zwar kurz dauernde, aber grosse Potentialdifferenz erzeugt, welche nun im Stande ist, ein plötzliches Aufleuchten im Gesichtsfeld zu bewirken. Ich finde dann auch im Gegensatz zu Hrn. Kerr, dass dieser Effect bei allen von mir untersuchten, schlecht leitenden Substanzen vorhanden ist; nur unterscheidet sich derselbe von dem bei besser leitenden durch eine grössere Dauer, was begreiflich ist.

Diese soeben besprochene Abänderung der Versuchs-methode liefert ein sehr willkommenes Mittel, die verhältniss-mässig gut leitenden Flüssigkeiten auf ihre electrooptischen Eigenschaften zu untersuchen; *es gelang mir auch auf diesem Wege bei Glycerin (spec. Gew. 1,25), Schuefeläther und destillirtem Wasser einen Einfluss der Electricität auf das hindurchgehende Licht aufzufinden.*

Als Electroden dienten bei der Untersuchung des Glycerins die oben erwähnte Scheibe und die Kugel von 1 cm

---

suchen niemals Phasendifferenzen vorkamen, welche den Werth  $\frac{\lambda}{2}$  erreichten, und darf deshalb die Intensitätsänderung als massgebend mit anführen. Ausserdem entscheidet aber die Richtung des Wanderns der dunklen Streifen, welche immer beobachtet und notirt wurde.

Durchmesser; der Abstand betrug 0,25 cm. Die eingeschaltete Funkenstrecke zwischen zwei Kugeln von 1,4 cm Durchmesser hatte eine Länge von 1,0 cm. Das plötzliche, nicht sehr starke Aufleuchten in der Mitte des Gesichtsfeldes wurde bei der Stellung I der Nicols beobachtet, dasselbe trat nur dort auf, wo die stärkste Wirkung zu erwarten ist; in der Stellung II konnte ich bei dieser und den beiden folgenden Flüssigkeiten nichts bemerken, was ohne Zweifel dadurch zu erklären ist, dass bei dieser Stellung die grösseren Felder stärkerer Doppelbrechung überhaupt keine Intensitätsänderung zeigen können, weil dort die Kraftlinien parallel und senkrecht zu dem Hauptschnitt des Polarisors verlaufen. Der Conductor der Electrisirmschine war mit der innern Belegung einer Leydener Flasche, deren äussere Belegung zur Erde abgeleitet war, in Verbindung (belegte Fläche 840 qcm); ohne diesen Condensator gelang es mir nicht, mit Sicherheit eine Erhellung zu beobachten.

Bei Schwefeläther war die Scheibe die untere und eins der Parallelepipede die obere Electrode; Abstand 0,2 bis 0,3 cm; Funkenstrecke 1 bis 1,5 cm. Der Effect war bei der Stellung I der Nicols auch ohne Leydener Flasche deutlich sichtbar, wurde jedoch bedeutend intensiver nach Einschaltung derselben.

Die Anordnung der Versuche mit gewöhnlichem, in Glasgefassen destillirtem Wasser war im wesentlichen dieselbe wie vorhin. Die Erhellung war ausserordentlich deutlich und stärker als bei Glycerin. Zwei Leydener Flaschen waren eingeschaltet; eine weitere Vermehrung der Flaschenzahl und eine dadurch bedingte Verringerung der Schlagweite hatte zur Folge, dass die Erscheinung fast vollständig ausblieb. Es hat sich überhaupt ergeben, dass, wenn bei einer relativ gut leitenden Flüssigkeit die Erscheinung deutlich erkannt werden soll, eine für jede Flüssigkeit specifische Versuchsanordnung, was die Flaschenzahl, die Funkenstrecke und die Entfernung der Electroden betrifft, getroffen werden muss. Wahrscheinlich ist es diesem Umstand zuzuschreiben, dass es mir bis jetzt nicht gelang, in schwach angesäuertem Wasser, sowie in Alkohol von 99,5 Proc. einen electroopti-

schen Effect aufzufinden; ich hege keinen Zweifel darüber, dass es durch passende Combinationen gelingen wird, auch selbst in Flüssigkeiten von noch besserem Leitungsvermögen einen solchen Effect wahrzunehmen.

Bei den obigen Versuchen wurden immer die Electroden so weit voneinander entfernt, dass gerade eine Funkenentladung durch die Flüssigkeit nicht mehr stattfand.

In einer Geissler'schen Vacuumröhre, die keine sichtbare Entladung durchlässt, war trotz des Vorhandenseins einer bedeutenden Potentialdifferenz zwischen den um ungefähr 0,2 cm voneinander entfernten drahtförmigen Electroden nichts von einer Doppelbrechung zu bemerken.

Zum Schluss seien ein paar Versuche beschrieben, die ich in der Hoffnung anstellte, einige Anhaltspunkte für eine Erklärung der oben mitgetheilten Thatsachen zu erhalten.

Die lebhafte Bewegung, die man bei der Entladung in einer schlecht leitenden Flüssigkeit wahrnimmt, erregte in mir den Gedanken, ob wohl durch in der Flüssigkeit vorhandene Druckdifferenzen und dadurch erzeugte intensive Strömungen eine doppelbrechende Wirkung ausgeübt werden könnte; war doch in zähflüssigen Substanzen, wie z. B. Canada-balsam durch Mach und Maxwell eine derartige Doppelbrechung nachgewiesen. Es wurde zu diesem Zweck die untere Electrode aus der Flasche entfernt und an deren Stelle ein Glasrohr mit enger Oeffnung gesetzt, durch welches Schwefelkohlenstoff und später andere Flüssigkeiten unter hohem Druck gegen die obere Electrode gespritzt wurden. Wenn auch öfters wahrscheinlich infolge von kleinen Temperaturdifferenzen entstandene Schlieren in der Flüssigkeit auftraten, so gelang es mir doch niemals, eine eigentliche Doppelbrechung wahrzunehmen, und es scheint somit, dass eine Erklärung auf diesem Wege ausgeschlossen ist.

Die Beobachtung jener Schlieren jedoch, sowie der früher mitgetheilten lebhaften Hin- und Herbewegung von festen Theilchen zwischen den Electroden führte mich zu einer andern Hypothese über die Natur der Vorgänge in der Flüssigkeit, von der jedoch sofort erwähnt werden muss, dass es sehr fraglich ist, ob dieselbe mehr Wahrscheinlich-

keit für sich hat als die Annahme eines directen Einflusses der Electricität auf die Lichtbewegung. Würde man nämlich annehmen dürfen, dass die Entladung in der Flüssigkeit in der Weise stattfände, dass zwischen den Electroden Flüssigkeitstheilchen sich hin- und herbewegen, dass sich gewissermassen in der Richtung der Kraftlinien sehr dünne Flüssigkeitsfäden bilden, von denen die mit positiver Electricität versehenen eine andere Temperatur oder eine andere Dichte oder schliesslich eine andere chemische Beschaffenheit hätten, als die mit negativer Electricität beladenen, in umgekehrter Richtung sich bewegenden, so liesse es sich denken, dass durch Reflexionen und Brechungen und dadurch entstandene Phasendifferenzen eine Wirkung auf das geradlinig polarisirte Licht ausgeübt würde, welche Erscheinungen, die den beobachteten ähnlich sind, hervorrufen müssten. Man stelle sich doch ein Büschel von vielen, äusserst dünnen und einfach brechenden Glasstäbchen vor, die in der Richtung der Kraftlinien gebogen sind und sich in einer klar durchsichtigen Flüssigkeit befinden, deren optische Eigenschaften denen des Glases nahezu gleich sind, so würden dieselben, wie ich glaube, das geradlinig polarisirte Licht in ähnlicher Weise modifiziren, wie es bei den obigen Versuchen beobachtet wurde, ohne gerade eine merkliche Trübung oder Verzerrung des Gesichtsfeldes erzeugen zu müssen. Leider erhält man keine einfach-brechenden Glasfäden, sondern immer doppelbrechende, und kann deshalb jene Ansicht durch den Versuch nicht prüfen.

In dem Fall, dass die obige Erklärung sich als zulässig herausstellte, oder dass auf irgend einem andern Wege nachgewiesen würde, dass die Electricität sich blos in indirecter Weise bei den Versuchen betheiligt, so wäre die Kerr'sche Erscheinung immerhin eine interessante Beobachtung; dieselbe erhält dagegen eine ausserordentlich fundamentale Bedeutung, wenn jede derartige Erklärung sich als unhaltbar ergibt, und es dadurch äusserst wahrscheinlich geworden ist, dass wir es in der That mit einer neuen, directen Wirkung der Electricität auf die Lichtschwingungen zu thun haben.

Nehmen wir einmal an, dass das letztere wirklich der Fall wäre, so würde die Frage entstehen, ob diese Wirkung electrodynamischen oder electrostatischen Ursprungs sei; mit anderen Worten, ob dieselbe durch die Bewegung der Electricität von der einen Electrode zur andern oder durch die auf jedes Theilchen inducirend wirkende electrostatische Kraft erzeugt werde. Dass eine solche Bewegung von Electricität stattfindet (wahrscheinlich zum grössten Theil in der Form von fortführenden Entladungen), ist bei den obigen Versuchen leicht zu erkennen; außerdem spricht dafür die von mir bei einer früheren Gelegenheit gemachte Erfahrung, dass alle sehr schlecht leitende Flüssigkeiten, wie Schwefelkohlenstoff, Petroleum, fette Oele u. s. w. verhältnissmässig rasch Potentialdifferenzen weniger Daniells ausgleichen, wenn dafür gesorgt wird, dass nicht durch neue Zufuhr von Electricität jene Differenz erhalten bleibt.

Ueber diese Frage liesse sich vielleicht einiges Licht gewinnen, wenn man untersuchte, wie die oben beschriebenen Erscheinungen sich zu strömender Electricität verhalten, ob z. B. in einem stark magnetischen Felde Änderungen in der Anordnung der hellen und dunklen Theile der Erscheinung stattfinden. Ein in dieser Richtung angestellter Versuch ergab nichts Bestimmtes; es müssten derartige Versuche auch jedenfalls mit bedeutend kräftigeren Electromagneten vorgenommen werden, als mir zur Verfügung stehen. Es sei nebenbei erwähnt, dass die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene bei jenem Versuche nicht merklich durch die erzeugte Doppelbrechung geändert wurde.

Endlich habe ich noch den Einfluss untersucht, welchen eine Bewegung der Flüssigkeit auf den electrooptischen Effect ausübt. Von einer zweiten mit Schwefelkohlenstoff gefüllten Flasche führt ein Glasrohr durch den Hals der oben beschriebenen Flasche in das Innere derselben; durch dieses Glasrohr kann ein kräftiger Strom von Schwefelkohlenstoff in horizontaler Richtung und senkrecht zu den durchgehenden Lichtstrahlen zwischen den Electroden hindurch getrieben werden. Als Electroden wählte ich die Kugel und die Scheibe. Die Stellung II der Nicols liefert

alsdann unter gewöhnlichen Verhältnissen beim Drehen der Electrisirmschine die Fig. 7; sobald jedoch der von der Seite kommende Schwefelkohlenstoffstrom zu Stande gekommen ist, wird die Figur, d. h. selbstverständlich der zwischen Kugel und Scheibe liegende Theil, in der Richtung des Stromes verschoben und zwar am stärksten in den der Scheibe zunächst liegenden Partien; das untere Ende des centralen, dunklen Streifens wird vom Strom stark mitgerissen, während das obere Ende nur wenig verrückt erscheint. Die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen übt somit einen sehr merklichen Einfluss auf die Lage der Schwingungsrichtungen des Lichtes aus.

Giessen, 31. December 1879.

## VI. Ueber einige neue Untersuchungen über die mittlere Weglänge der Gasmoleküle; von R. Clausius.

Es sind in neuerer Zeit von verschiedenen Autoren Untersuchungen über die mittlere Weglänge der Moleküle gasförmiger Körper angestellt, welche dazu geführt haben, dass mehrfache Änderungen an der früheren Bestimmung dieser Weglänge vorgeschlagen sind, und ich glaube daher, dass eine zusammenfassende Besprechung dieser Änderungsvorschläge nicht als unzweckmässig erscheinen wird.

1. Die erste Bestimmung der mittlern Weglänge der Gasmoleküle habe ich in einem i. J. 1858 in Pogg. Ann.<sup>1)</sup> veröffentlichten Aufsätze ausgeführt. Ich ging dabei von der Betrachtung eines einfacheren Falles aus, indem ich zuerst nur ein Molekül als bewegt und alle anderen als ruhend annahm. Für diesen Fall erhielt ich für die mitt-

1) Clausius, Pogg. Ann. 105, p. 239, 1858. Wieder abgedruckt in meiner Abhandlungen-Sammlung, 2. p. 260.

lere Weglänge  $l'$  des bewegten Moleküls folgenden Ausdruck:

$$(1) \quad l' = \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^3}.$$

Hierin bedeutet  $\lambda$  den Abstand, den zwei einander zunächst liegende Moleküle haben würden, wenn die Moleküle cubisch angeordnet wären. Will man statt dieser Grösse  $\lambda$  lieber die Grösse  $n$  einführen, welche die Anzahl der Moleküle in der Raumeinheit angibt, so lautet der Ausdruck:

$$(2) \quad l' = \frac{1}{n \pi \varrho^2}.$$

Das Zeichen  $\varrho$  stellt den Radius der Wirkungssphäre eines Moleküls dar. Dabei ist unter Wirkungssphäre diejenige um den Schwerpunkt eines Moleküls beschriebene Kugel verstanden, bis zu deren Oberfläche der Schwerpunkt eines andern Moleküls sich ihm nähern kann, bevor ein Abprallen eintritt. Stellt man sich, wie es zuweilen der Anschaulichkeit wegen geschieht, die Moleküle als harte elastische Kugeln vor, so tritt bei diesen das Abprallen ein, wenn der Abstand ihrer Schwerpunkte gleich ihrem Durchmesser ist, und für solche elastische Kugeln ist daher der Radius  $\varrho$  der Wirkungssphären doppelt so gross, als der Radius der Kugeln selbst.

Nachdem ich so für den einfachen Fall, wo nur ein Molekül sich bewegt, während die übrigen in Ruhe sind, die mittlere Weglänge ausgedrückt hatte, handelte es sich weiter darum, zu bestimmen, wie dieser Ausdruck geändert werden muss, wenn sich alle Moleküle, und zwar mit durchschnittlich gleichen Geschwindigkeiten, bewegen. Die unter diesen Umständen nöthige Änderung besteht darin, dass man den vorigen Ausdruck mit dem Verhältnisse der mittlern absoluten Geschwindigkeit aller Moleküle zur mittlern relativen Geschwindigkeit aller Molekülpaares zu multipliciren hat. Bezeichnet man also die absolute Geschwindigkeit eines Moleküls mit  $v$  und den Mittelwerth dieser Grösse mit  $\bar{v}$ , und ferner die relative Geschwindigkeit zweier Moleküle mit  $r$  und den Mittelwerth dieser Grösse für alle Combinationen aus je zwei Molekülen mit  $\bar{r}$ , so erhält man für die mittlere

Weglänge, welche jetzt mit  $l$  bezeichnet werden möge, den Ausdruck:

$$(3) \quad l = \frac{1}{n \pi \rho^2} \cdot \frac{\bar{v}}{\bar{r}}.$$

Um nun aber das hier eingeführte Verhältniss  $\frac{\bar{v}}{\bar{r}}$  numerisch zu bestimmen, muss man die Art der Bewegung der Moleküle näher kennen, d. h. man muss wissen, welches Gesetz in Bezug auf die verschiedenen gleichzeitig stattfindenden Geschwindigkeiten aller einzelnen Moleküle gilt. Zu der Zeit, wo ich meine Untersuchung machte, war ein solches Gesetz noch nicht aufgefunden, und ich musste mich daher bei meiner Rechnung, bei der es sich, wie ich sagte, nur darum handelte, einen ungefährnen Begriff von der Grösse des Verhältnisses zu erhalten, mit einer für diesen Zweck geeigneten Annahme begnügen. Als solche wählte ich die, dass alle Moleküle nicht nur durchschnittlich, sondern fortwährend gleiche Geschwindigkeiten haben, was freilich in der Wirklichkeit nicht möglich ist, da die Geschwindigkeiten sich bei jedem Stosse ändern, aber für eine angenäherte Rechnung doch angenommen werden konnte. Unter Zugrundelegung dieser Annahme ergab sich für das Verhältniss der Werth  $\frac{1}{2}$ .

Ein Jahr später veröffentlichte Maxwell seine bekannte schöne Abhandlung „Illustrations of the dynamical theory of gases“<sup>1)</sup>, in welcher er sein Gesetz über die Geschwindigkeiten der einzelnen Gasmoleküle ableitete. In dieser Abhandlung beschäftigte er sich auch mit der mittleren Weglänge der Moleküle und gelangte, was die allgemeine Formel anbetrifft, zu demselben Resultate, wie ich. Die numerische Berechnung des Verhältnisses der beiden mittleren Geschwindigkeiten konnte er aber anders ausführen, wie ich, indem er ihr sein soeben abgeleitetes Geschwindigkeitsgesetz zu Grunde legen konnte, aus welchem sich für das gesuchte Verhältniss der Werth  $\sqrt{\frac{2}{5}}$  ergibt. Diese Abänderung des von mir berechneten Werthes  $\frac{1}{2}$  ist

1) Maxwell, Phil. Mag. (4) 19. p. 19. 1859.

offenbar  
mir be  
für we  
wie ic  
richtig  
nomme  
schen  
lichkeit  
Anwer

(4)

2.  
wände  
„Nieu  
„Eene  
satz zu

F  
welche  
beweg  
sich d  
dabei  
unter,  
wegen  
ist, ni

I  
füllten  
δ so l  
die er  
von d  
in Re  
drückt  
handelt  
hin ab  
mal zu  
kurz o

1)

offenbar nicht so aufzufassen, als ob Maxwell einen von mir begangenen Fehler berichtigt hätte, denn für den Fall, für welchen ich meinen Werth  $\frac{1}{4}$  abgeleitet hatte, war er, wie ich noch besonders nachgewiesen habe<sup>1)</sup>, vollkommen richtig. Da dieser Fall aber nur ein zur Aushilfe angemommener war, so stehe ich nicht an, den aus dem Maxwell'schen Gesetze abgeleiteten Werth  $\sqrt{\frac{1}{4}}$  als einen der Wirklichkeit mehr entsprechenden anzuerkennen. Unter seiner Anwendung lautet der Ausdruck für  $l$ :

$$(4) \quad l = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{n \pi \rho^2}.$$

2. Was nun die gegen den Ausdruck erhobenen Einwände anbetrifft, so ist zunächst ein von Frowein in dem „Nieuw Archief voor Wiskunde“, Deel V, unter dem Titel „Eene bekende formule van Clausius“ veröffentlichter Aufsatz zu erwähnen.

Frowein bekämpft schon meine erste Entwicklung, welche sich auf den Fall bezieht, wo nur ein Molecül sich bewegt, während die anderen in Ruhe sind, und aus welcher sich die unter (1) mitgetheilte Formel ergeben hat. Er legt dabei aber meinen Aussprüchen einen so unrichtigen Sinn unter, dass ich vermuthe, dass er meine Abhandlung wegen der ihm fremden Sprache, in welcher sie geschrieben ist, nicht überall richtig verstanden hat.

Ich habe gesagt, man solle sich den mit Molekülen erfüllten Raum in dünne Schichten zerlegt denken, deren Dicke  $\delta$  so klein sei, dass man höhere Potenzen derselben gegen die erste Potenz vernachlässigen könne. Indem ich dann von den Molekülen sprach, welche für jede dieser Schichten in Rechnung zu bringen sind, habe ich das erste Mal ausdrücklich gesagt, dass es sich dabei um diejenigen Moleküle handle, deren Centra sich in der Schicht befinden. Weiterhin aber habe ich es nicht für nötig gehalten, dieses jedesmal zu wiederholen, sondern habe die betreffenden Moleküle kurz die in der Schicht befindlichen Moleküle genannt. An-

1) Maxwell, Phil. Mag. (4) 21. p. 434. 1860.

statt nun dieses so zu verstehen, wie es dem Vorausgegangenen entspricht, nämlich dass es sich nur um die Lage der Centra handelt, fasst Hr. Frowein es wörtlich auf und erhebt dagegen den Einwand, eine unendlich dünne Schicht könne nicht ganze Moleküle, sondern nur Theile von Molekülen enthalten.

Ferner habe ich die Anzahl der in einer Schicht von der Dicke  $\delta$  befindlichen Moleküle mit der Anzahl der in einer Schicht von der Dicke  $\lambda$  befindlichen verglichen, und habe gesagt, aus der letztern Anzahl erhalte man die erstere durch Multiplication mit  $\frac{\delta}{\lambda}$ . Da ich nun in derselben Be- trachtung auch davon gesprochen habe, dass man sich alle in der Schicht von der Dicke  $\lambda$  befindlichen Moleküle so verlegt denken solle, dass ihre Centra in einer Ebene liegen,

so meint nun Hr. Frowein, jene Multiplication mit  $\frac{\delta}{\lambda}$  solle dazu dienen, einen auf eine Ebene bezüglichen Ausdruck in einen auf einen Raum bezüglichen zu verwandeln, wogegen er sich dann ausspricht. Man sieht also wohl, dass es sich bei diesen beiden Einwänden nur um Missverständnisse handelt.

Ausser diesen Einwänden macht Frowein aber noch einen andern, welcher mehr sachlicher Art ist. Er sagt nämlich, zwischen dem Falle, wo nur ein Molekül sich bewegt, während die anderen in Ruhe sind, und dem, wo alle Moleküle sich bewegen, finde in Bezug auf die mittlere Weglänge gar kein Unterschied statt. Man habe also die auf den ersten Fall bezügliche mittlere Weglänge weder mit  $\frac{1}{2}$ , noch mit  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  zu multipliciren, sondern ganz unverändert auch auf den letztern Fall anzuwenden. Er gibt allerdings zu, dass die Anzahl der Stösse, welche ein Molekül in der Zeiteinheit erleidet, unter bewegten Molekülen grösser sei, als unter ruhenden, und zwar in demselben Verhältnisse, in welchem seine mittlere relative Geschwindigkeit zu den bewegten Molekülen grösser sei, als seine mittlere absolute Geschwindigkeit, sagt aber, bei der Ableitung der mittlern Weglänge aus der Anzahl der Stösse habe man ebenfalls die

mittlere  
luten  
hebe  
thum,  
die m  
von ih  
die A  
dividi  
absol  
Wege  
der Z  
wande  
3.  
wände  
Forme  
ihm ge  
Bespre  
nöthig  
S  
nicht  
des v  
und d  
Werth  
E  
den M  
in ein  
Mitteln  
an bi  
er we  
Mome  
schon  
eben  
der n  
demna  
bis zu

1)  
naturel  
Ann.

mittlere relative Geschwindigkeit statt der mittlern absoluten Geschwindigkeit in Rechnung zu bringen, und dadurch hebe sich jener Unterschied wieder auf. Dieses ist ein Irrthum, denn es ist ohne weiteres ersichtlich, dass man, um die mittlere Weglänge eines Moleküls zu erhalten, die ganze von ihm während der Zeiteinheit durchlaufene Strecke durch die Anzahl der Wege, aus welchen die Strecke besteht, zu dividiren hat. Jene Strecke wird aber durch seine mittlere absolute Geschwindigkeit dargestellt, und die Anzahl der Wege ist gleich der Anzahl der Stösse, welche es während der Zeiteinheit erleidet. Somit ergibt sich auch dieser Einwand als ungerechtfertigt.

3. Von grösserer Bedeutung, als die vorstehenden Einwände, ist eine Veränderung, welche Korteweg mit meiner Formel vorgenommen hat<sup>1)</sup>, weil das Irrthümliche in der von ihm gegebenen Begründung schwerer herauszufinden ist. Eine Besprechung dieser Veränderung scheint mir daher besonders nöthig zu sein.

Sie besteht in der Hinzufügung eines in meiner Formel nicht vorkommenden Factors 2, also in der Verdoppelung des von mir gegebenen Werthes der mittlern Weglänge, und die Schlussweise, durch welche er zu diesem doppelten Werthe gelangt, ist folgende.

Er betrachtet zunächst alle sich durcheinander bewegenden Moleküle in den Bewegungsstadien, in welchen sie sich in einem gewissen Momente befinden, und bestimmt den Mittelwerth der Wegstücke, welche sie von diesem Momente an bis zu ihren nächsten Stössen zurücklegen. Dann sagt er weiter, vor jenem von ihm zur Betrachtung ausgewählten Momente haben die Moleküle seit ihren letzten Stössen auch schon gewisse Wegstücke durchlaufen, deren Mittelwerth eben so gross sei, wie der von ihm bestimmte Mittelwerth der nach jenem Momente durchlaufenden Wegstücke, und demnach sei der Mittelwerth der ganzen von einem Stosse bis zum andern durchlaufenen Wege doppelt so gross, als

1) Korteweg, Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, 12. p. 241. 1877.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. X.

jener von ihm bestimmte Mittelwerth, und dieser doppelte Werth sei somit als mittlere Weglänge anzunehmen.

Diese Schlussweise scheint auf den ersten Blick so einfach und natürlich zu sein, dass man glauben könnte, ihr ohne weiteres zustimmen zu müssen. Dessenungeachtet ist sie unrichtig. Der Mittelwerth der Wegstücke, welche die Molecüle von einem gewissen Momente an bis zu den nächsten Stössen durchlaufen, ist nicht halb so gross, sondern eben so gross, wie die Strecke, welche wir mittlere Weglänge nennen, nämlich der Mittelwerth aller im Gase vorkommenden, von einem Stosse zum andern durchlaufenden Wege.

Ich habe mich über diesen Punkt schon einmal in meiner Abhandlung über die Wärmeleitung gasförmiger Körper ausgesprochen.<sup>1)</sup> Dort habe ich nämlich alle Molecüle betrachtet, welche sich in einem gewissen Momente in einer unendlich dünnen Schicht befinden, und habe mir die Frage gestellt, wie gross der Mittelwerth der Wegstücke sei, welche sie von diesem Momente an bis zu ihren nächsten Stössen durchdurchlaufen müssen, und ebenso, wie gross der Mittelwerth der Wegstücke sei, welche sie vor diesem Momente seit ihren letzten Stössen durchlaufen haben. Diese beiden unter sich gleichen Mittelwerthe, welche ich mit  $\bar{s}$  bezeichnete, stellten sich als eben so gross heraus, wie die ganze, früher von mir bestimmte mittlere Weglänge, welche ich dadurch erhalten hatte, dass ich, von einer grossen Anzahl von Stössen ausgehend, die Wege der Molecüle bis zu ihren nächsten Stössen betrachtete und von diesen den Mittelwerth nahm. Nachdem ich auf diesen eigenthümlichen Umstand im Texte aufmerksam gemacht hatte, fügte ich zur Erklärung desselben folgende Anmerkung hinzu.

„Es kann vielleicht auf den ersten Blick auffällig erscheinen, dass man für die Wege von den letzten Zusammenstössen bis zu einem gewissen Zeitpunkte, oder von diesem Zeitpunkte bis zu den nächsten Zusammenstössen denselben

1) Clausius, Pogg. Ann. 115. p. 20. 1862 und Abhandlungen-Sammlung 2. p. 292. 1867.



Mittelwerth erhält, wie für die während einer gewissen Zeit in dem Gase zurückgelegten ganzen Wege von einem Zusammenstosse bis zum nächsten. Dabei muss man aber bedenken, dass der Mittelwerth aus allen Wegen, welche während einer gewissen Zeit in dem Gase zwischen je zwei Zusammenstössen zurückgelegt werden, nicht gleichbedeutend ist mit demjenigen Mittelwerthe, den man erhalten würde, wenn man von allen Molekülen, welche sich in einem gewissen Momente gleichzeitig in einer Schicht befinden, die Wege von ihren letztvorangegangenen bis zu ihren nächstfolgenden Zusammenstössen betrachten wollte. Im letztern Falle sind nämlich die grossen Wege gegenüber den kleinen stärker vertreten, als im erstern, denn ein Molekül braucht zu einem grossen Wege mehr Zeit, als zu einem kleinen, und es ist daher für einen gewissen Moment mehr Wahrscheinlichkeit, dass es sich auf einem grossen Wege befindet, als auf einem kleinen, während im erstern Falle alle im Gase vorkommenden Wege gleich zählen. Wenn man die Rechnung ausführt, so findet man im letztern Falle einen doppelt so grossen Mittelwerth, als im erstern. Von jenem grössern Mittelwerthe ist unser oben bestimmter Werth  $\frac{1}{2}$  die Hälften.“

Hieraus erklärt es sich also, weshalb Korteweg bei seinem Verfahren, bei dem er die Moleküle in einem gewissen Momente betrachtete und die Wege von ihren letztvorangegangenen bis zu ihren nächstfolgenden Stössen bestimmte, einen Werth erhalten musste, welcher doppelt so gross ist, als die wirkliche mittlere Weglänge.

4. Während die bisher besprochenen Meinungsdifferenzen über die richtige Form des Ausdrückes der mittlern Weglänge der Art waren, dass es sich dabei um verhältnissmässig bedeutende Werthänderungen handelte, ist schliesslich noch eine Abänderung des Ausdrückes zu erwähnen, bei welcher es sich nur um einen verhältnissmässig sehr kleinen Unterschied des Werthes handelt, nämlich um einen solchen, der von der Ordnung der Moleculardimensionen ist.

Ich habe, wie schon oben erwähnt, um die gegenseitige Einwirkung der Moleküle in Rechnung bringen zu können,

ohne doch über ihre Gestalt und über die von ihnen ausgeübten Kräfte specielle Hypothesen machen zu müssen, für jedes Molecül eine gewisse Wirkungssphäre angenommen, welche ich als eine um seinen Schwerpunkt beschriebene Kugel definierte, bis zu deren Oberfläche sich der Schwerpunkt eines andern Molecüls ihm nähern könne, bevor ein Abprallen eintrete. Nach dieser Annahme konnte ich in dem zuerst von mir behandelten Falle, wo nur ein Molecül sich bewegt, während die anderen in Ruhe sind, das bewegte Molecül durch einen blossen Punkt ersetzen, welcher zwischen den Wirkungssphären der ruhenden Molecüle umherfliegt und bald hier, bald dort an eine derselben anstösst.

Um nun, wenn der Punkt sich mit einer gewissen Bewegungsrichtung einer Wirkungssphäre nähert, zu bestimmen, ob er sie trifft oder an ihr vorübergieht, dachte ich mir senkrecht zu der Bewegungsrichtung des Punktes einen grössten Kreis durch die Wirkungssphäre gelegt und sagte dann, wenn die Bahnlinie des Punktes diese Kreisfläche schneidet, so findet Zusammentreffen, im andern Falle Vorübergiehen statt.

Im Zusammenhange mit dieser Betrachtung habe ich auch das Ende des Weges, welchen der Punkt bis zum Zusammentreffen zu durchlaufen hat, der Einfachheit wegen so bestimmt, als ob es in jener mittlern Kreisfläche läge. Da aber in der Wirklichkeit der Punkt sich nicht bis zur mittlern Kreisfläche, sondern nur bis zur Oberfläche der Wirkungssphäre bewegen kann, so ist durch diese Bestimmungsweise der Weg etwas zu lang gerechnet. Der unter (1) und (2) mitgetheilte Ausdruck von  $l'$  hat also einen etwas zu grossen Werth, und dieselbe Ungenauigkeit überträgt sich natürlich auch auf den aus (2) abgeleiteten Ausdruck (3), welcher die mittlere Weglänge für den Fall darstellt, wo nicht blos ein Molecül sich bewegt, sondern alle Molecüle in Bewegung sind. Da aber bei Gasen, die nicht sehr stark verdichtet sind, die mittlere Weglänge gegen den Radius der Wirkungssphäre sehr gross ist, so ist die auf diese Weise entstandene Ungenauigkeit im Verhältniss zur ganzen mittlern Weglänge sehr klein.

Später sind verschiedene Versuche gemacht, diese kleine Ungenauigkeit noch zu corrigiren und die wirkliche Lage der Stosspunkte in den Oberflächen der Wirkungssphären zu berücksichtigen. Die erste derartige Rechnung wurde von van der Waals in seiner schönen Schrift: „Over de continuïteit van den gas-en vloeistoftoestand“ (Leiden 1873) ausgeführt. Ein Jahr später habe ich selbst, ohne damals den Inhalt jener in holländischer Sprache verfassten Schrift zu kennen, bei Gelegenheit einer andern Untersuchung<sup>1)</sup> eine erneute Bestimmung der mittlern Weglänge der Moleküle vorgenommen, bei der jene Verlegung der Stosspunkte in die mittleren Kreisflächen nicht vorkommt. Ferner hat Korteweg in seiner schon oben citirten Abhandlung<sup>2)</sup>, in welcher er den Factor 2 in die Formel eingeführt hat, gleichzeitig den hier in Rede stehenden Umstand mit berücksichtigt, und endlich ist auch van der Waals noch einmal auf den Gegenstand zurückgekommen.<sup>3)</sup>

Die Resultate dieser verschiedenen Untersuchungen stimmen untereinander nicht ganz überein, sondern es ist in ihnen noch ein Differenzpunkt geblieben. Ich glaube aber kaum, dass eine Erörterung desselben für die Leser von erheblichem Interesse sein würde, da selbst eine vollkommen genaue Berücksichtigung des in Rede stehenden Umstandes die Sache noch nicht zum Abschluss bringen würde. Ich habe nämlich bei weiterer Betrachtung des Gegenstandes gefunden, dass, wenn man einmal so kleine Unterschiede, wie den durch die Lage des Stosspunktes bedingten, in Rechnung ziehen will, man auch noch auf einen andern die mittlere Weglänge beeinflussenden Umstand Rücksicht nehmen muss.

Die vorher definirten Wirkungssphären der Moleküle sind nämlich grösser als die Moleküle selbst. Denkt man sich z. B. die Moleküle als harte elastische Kugeln, so

1) Clausius, Sitzungsberichte der Niederrhein. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1874, und Pogg. Ann. Ergzbd. 7. p. 215. 1876.

2) Korteweg, Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, 12. p. 241. 1877.

3) van der Waals, Archives Néerlandaises. 12. p. 201. 1877.

haben bei diesen, wie schon oben einmal erwähnt wurde, die Wirkungssphären einen doppelt so grossen Radius und daher ein achtmal so grosses Volumen, als die elastischen Kugeln. Daraus folgt, dass, wenn zwei Moleküle einander sehr nahe liegen, ihre Wirkungssphären sich zum Theil gegenseitig decken können. Dieser Umstand ist bei der zur Ableitung der Gleichung (2) angestellten Betrachtung des Falles, wo ein Punkt sich zwischen den ruhenden Wirkungssphären umherbewegt, nicht berücksichtigt, sondern es ist stillschweigend angenommen, dass die Oberflächen aller Wirkungssphären vollkommen frei seien, sodass sie in jedem ihrer Punkte von dem bewegten Punkte getroffen werden können. Hierdurch ist nun ebenfalls eine Ungenauigkeit in dem durch die Gleichung (2) bestimmten Werthe von  $l'$  und demgemäß auch in dem durch die Gleichung (3) bestimmten Werthe von  $l$  veranlasst, welche von derselben Ordnung ist, wie die vorher besprochene, sodass eine Correction der einen ohne gleichzeitige Correction der andern gar nichts nützen kann.

Man könnte nun freilich durch eine erweiterte Rechnung auch die zweite Correction noch hinzufügen, und in der That habe ich für mich eine solche Rechnung ausgeführt. Ich muss aber sagen, dass ich wenig Gewicht darauf lege. Es ist nämlich zu beachten, dass die ganze Annahme von scharf abgegrenzten Wirkungssphären nur eine angenäherte ist. Bei harten elastischen Kugeln, welche beim Zusammentreffen plötzlich voneinander abprallen, lässt sich allerdings der Vorgang durch Einführung von Wirkungssphären von bestimmt angebbarer Grösse genau darstellen. Die wirkliche gegenseitige Einwirkung der Moleküle ist aber wahrscheinlich von dem Verhalten harter elastischer Kugeln sehr verschieden und lässt sich durch die Einführung von scharf begrenzten Wirkungssphären nur unvollkommen darstellen. Wenn hiernach schon in der Annahme, auf welcher die Rechnung beruht, eine Ungenauigkeit liegt, so würde es meiner Ansicht nach keinen Nutzen haben, wenn man die Rechnung selbst bis zur äussersten Genauigkeit treiben wollte.

Es scheint mir vielmehr, solange uns nähere Kenntnisse

über die  
Bestim-  
zu beg-  
Gleich-  
bleiben  
vollkom-  
der Or-  
Ungen-  
weich-  
Gesetz-  
zustand  
die wi-  
als an-  
Gesetz:

H

VII.

I  
den l  
gen u  
in re  
der P

I  
suche  
leitu  
versc  
den p

einer

1  
Comm

über die Moleküle fehlen, am angemessensten, sich bei der Bestimmung ihrer mittlern Weglänge mit einer Annäherung zu begnügen und bei der ursprünglich von mir abgeleiteten Gleichung (3), welche die einfachste Form hat, stehen zu bleiben, dabei aber im Auge zu behalten, dass sie nicht vollkommen genau, sondern mit einer Ungenauigkeit von der Ordnung der Moleculardimensionen behaftet ist. Diese Ungenauigkeit fällt dann in dieselbe Kategorie, wie die Abweichung der Gase vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze und von den anderen für den vollkommenen Gaszustand geltenden Gesetzen, welche trotzdem, dass sie für die wirklichen Gase nicht ganz genau sind, doch ihren Werth als angenäherte und durch ihre Einfachheit ausgezeichnete Gesetze behalten.

Bonn, Februar 1880.

---

## VII. *Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten; von H. F. Weber.*

Der Vorgang der Wärmeleitung in Flüssigkeiten ist in den letzten zehn Jahren wiederholt messenden Untersuchungen unterworfen worden, welche theils in absolutem, theils in relativem Maasse die Grösse der Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeiten feststellen sollten.

Eine kritische Durchsicht dieser verschiedenen Untersuchungen führt zu dem Resultat: so viele Male die Wärmeleitung der Flüssigkeiten untersucht wurde, ebenso viele verschiedene, einander total widersprechende Resultate wurden gewonnen.

Ich übergehe die Resultate, welche Hr. Guthrie in einer ausgedehnten Arbeit<sup>1)</sup> über die relativen Leitungs-

---

1) On the Thermal Resistance of Liquids. By Frederick Guthrie, Communicated by Prof. Tyndall. Phil. Trans. 159. p. 637. 1869.

fähigkeiten der Flüssigkeiten für Wärme erhalten hat, weil sie sich sofort als völlig irrig herausstellen. Hr. Guthrie hat eine im Princip leistungsfähige Methode in gänzlich fehlerhafter Weise gehandhabt und hat die durch diese Methode gewonnenen Beobachtungsdaten in ebenso fehlerhafter Weise interpretirt.

Die ersten absoluten Messungen der Wärmeleitfähigkeitsfähigkeit einer Reihe verschiedener Flüssigkeiten hat Hr. Lundquist<sup>1)</sup> mit Hülfe der Methode ausgeführt, welche Ångström einige Jahre früher zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeitsfähigkeit der Metalle ausgebildet hatte. Die hauptsächlichsten Resultate, welche Hr. Lundquist durch Anwendung dieser ausserordentlich zuverlässigen, nur etwas zeitraubenden Methode erhalten hat, mögen in folgender kleiner Tabelle Platz finden. Das absolute Wärmeleitungsvermögen von Wasser, Kochsalzlösung und Zinkvitriollösung (Gramm, Centimeter, Minute und  $1^{\circ}$  C. als Einheiten zu Grunde gelegt) wurde bei einer mittlern Temperatur  $\bar{t}$  und bei den angeführten Werthen der Dichte  $\varrho$  und der spezifischen Wärme  $c$  gleich folgenden Werthen gefunden:

	$k$	$\bar{t}$	$\varrho$	$c$
Wasser . . . . .	0,0933	40,8°	1,000	1,000
Kochsalzlösung . . . . .	0,0895	43,9°	1,178	0,785
Zinkvitriollösung . . . . .	0,0964	44,1°	1,242	0,816
Zinkvitriollösung . . . . .	0,0949	45,2°	1,382	0,770

Fünf Jahre später hat Hr. Winkelmann den von Hrn. Stefan zur Bestimmung des absoluten Wärmeleitungsvermögens der Gase angegebenen Apparat dazu benutzt, das Wärmeleitungsvermögen von sechs Flüssigkeiten in absolutem Maasse festzustellen.<sup>2)</sup> Die definitiven Werthe der absoluten Wärmeleitungsvermögen (ausgemessen mit Hülfe der oben angegebenen Einheiten), welche Hr. Winkelmann aus seinen Beobachtungen ableitete, sind in der folgenden Tafel enthalten:

1) Lundquist, Undersökning af några vätskors ledningsförmåga för värme. Upsala Universitets arsskrift. p. 1. 1869.

2) Winkelmann, Pogg. Ann. 153. p. 481—498. 1874.

Wasser . . . . .	0,0924	Glycerin . . . . .	0,0448
Kochsalzlösung . . .	0,1605	Alkohol . . . . .	0,0904
Chlorkaliumlösung . . .	0,1147	Schwefelkohlenstoff . . .	0,1202

Diese Resultate sind mit denen des Hrn. Lundquist unvereinbar: während beide Beobachter für das Leitungsvermögen des Wassers nahezu denselben Werth gefunden haben, ist für Kochsalzlösung das von Hrn. Winkelmann gefundene Leitungsvermögen fast doppelt so gross als das von Hrn. Lundquist gefundene; nach den Ergebnissen des einen Beobachters würden die wässerigen Salzlösungen die Wärme nur wenig anders leiten als Wasser, nach den Resultaten des andern Beobachters würden im Gegentheil wässerige Salzlösungen bei weitem bessere Wärmeleiter sein als ihr Lösungsmittel.

In nicht viel besserer Uebereinstimmung stehen die von Hrn. Winkelmann erhaltenen Resultate mit den Ergebnissen einer ausgedehnten Arbeit, welche Hr. Beetz in neuester Zeit über die relativen Wärmeleitfähigkeiten der Flüssigkeiten ausgeführt hat.<sup>1)</sup> Hr. Beetz ermittelte mit Hülfe eines Apparates, der im Prinzip mit dem von Hrn. Winkelmann benutzten identisch ist, die relativen Werthe der Wärmeleitungsvermögen einer grossen Anzahl von Flüssigkeiten für die beiden Temperaturintervalle 8° bis 14° und 28° bis 36° C. Für das erstere Temperaturintervall fand er für folgende (auch von Hrn. Winkelmann bei derselben Temperatur untersuchte) Flüssigkeiten folgende Werthe des relativen Wärmeleitungsvermögens:

	Beetz	Winkelmann
Wasser . . . . .	100	100
Kochsalzlösung . . .	105	174
Glycerin . . . . .	82	48
Alkohol . . . . .	87	98
Schwefelkohlenstoff . . .	124	130

Die Arbeit des Hrn. Winkelmann gibt dagegen denselben Flüssigkeiten bei derselben Temperatur als relative Werthe

1) Beetz, Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der k. b. Academie der Wissenschaften, Heft 1, p. 86—115, 1879 und Wied. Ann. 8. p. 435—460. 1879.

des Wärmeleitungsvermögens Zahlenwerthe, welche die letzte Spalte der vorstehenden Tabelle enthält. Eine Vergleichung der Zahlen beider Spalten lässt sofort erkennen, wie weit die Ergebnisse dieser beiden Untersuchungen auseinander laufen. Während z. B. Hr. Beetz dem Glycerin ein doppelt so grosses Wärmeleitungsvermögen gibt als Hr. Winkelmann, ertheilt der letztere Beobachter der Kochsalzlösung fast den zweifachen Werth des Leitungsvermögens, welches Hr. Beetz derselben zukommen lässt.

Diese Angaben werden genügen, die Richtigkeit der eingangs gemachten Bemerkung über die grosse Divergenz der bisher über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten festgestellten Resultate zu belegen und hinreichend zur Evidenz zu bringen, dass im Gebiete der Wärmeleitung der Flüssigkeiten trotz der angeführten Untersuchungen wohl noch alles fraglich ist.

Diese Sachlage deutet an, dass entweder ein Theil oder die Gesamtheit der bisher zur Untersuchung der Wärmeleitung benutzten Methoden fehlerhaft ist, oder dass die durch richtige Methoden gewonnenen Beobachtungen falsch ausgelegt wurden.

Um Klarheit in diesen Widerstreit der Angaben zu bringen, ist nothwendig, eine von den bisher benutzten Untersuchungsmethoden verschiedene und möglichst fehlerfreie neue Untersuchungsmethode in Anwendung zu bringen und die durch die neue Beobachtungsmethode gelieferten Daten einer vollkommen strengen, auf die Principien der Theorie der Wärmeleitung basirten Berechnung zu unterwerfen. Die meinen Untersuchungen über das Elementargesetz der Hydrodiffusion zu Grunde liegende Methode führte mich auf den Gedanken, eine ganz analoge Untersuchungsform auf den Vorgang der Wärmeleitung in Flüssigkeiten anzuwenden. Schon die ersten Probeversuche liessen erkennen, dass man mit Hülfe dieser Methode den Verlauf der Wärmeleitung in Flüssigkeitslamellen mit derselben Schärfe, derselben Sicherheit und demselben minimalen Zeitaufwande messend verfolgen kann, mit der ich früher den Verlauf der Hydrodiffusion untersuchen konnte. Und bei der definitiven Durch-

führung dieser Untersuchungsmethode stellte sich heraus, dass dieselbe eine erheblich feinere Messung der sehr kleinen Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten gestattet, als die bisher zur Bestimmung der viele hundertmal grösseren Wärmeleitungsfähigkeiten der Metalle benutzten Methoden zu geben vermögen.

In der folgenden Abhandlung gebe ich

1) eine eingehende Beschreibung und eine möglichst vollständig entwickelte Theorie dieser benutzten Versuchsmethode;

ich theile sodann 2) die Resultate mit, welche ich bei Anwendung dieser Methode auf die Wärmeleitung in 14 verschiedenen nichtmetallischen Flüssigkeiten erhalten habe;

ich leite 3) aus diesen Resultaten ein allgemeines Gesetz ab, welches die Grösse des Wärmeleitungsvermögens nichtmetallischer Flüssigkeiten in einen einfachen Zusammenhang mit der specifischen Wärme der Volumeneinheit bringt;

4) löse ich die Widersprüche auf, welche einerseits zwischen meinen Resultaten und denen der Hrn. Lundquist, Winkelmann und Beetz, und welche andererseits zwischen den Resultaten dieser Beobachter bestehen

und füge 5) eine Reihe von Messungen über die Wärmeleitungsfähigkeit einer metallischen Flüssigkeit, des Quecksilbers, bei, um den fundamentalen Unterschied zwischen den Vorgängen der Wärmeleitung in metallischen und nichtmetallischen Flüssigkeiten vor Augen zu führen.

#### I. Beschreibung und Theorie der Untersuchungsmethode.

1. Auf eine circa 0,5 cm dicke, planparallele cylindrische Kupferplatte von etwa 200 qcm. Basisfläche werden drei genau gleich dicke, und zwar nur einige mm. dicke, planparallele Stückchen — von je 0,1 qcm Fläche — einer sehr schlecht wärmeleitenden festen Substanz (Glas, Hartgummi, etc.) gelegt; auf diese wird hierauf eine in ihrer untern Fläche genau eben geschliffene cylindrische Kupferplatte von circa 1 bis 1,5 cm. Dicke und einem Radius genau gleich

dem Radius der untern Platte gesetzt. Nachdem dieses Plattensystem genau horizontal gestellt worden ist, wird der dünne Zwischenraum zwischen den beiden Kupferplatten mit der auf die Wärmeleitung zu untersuchenden Flüssigkeit so weit ausgefüllt, dass die Flüssigkeit mit leicht gekrümmtem capillaren Bauche rings an den Plattenrändern hervortritt.

Das so vorgerichtete Plattensystem wird einer mässig hohen constanten Temperatur, etwa der Zimmertemperatur, solange ausgesetzt, bis es dieselbe durch seine ganze Masse hindurch angenommen hat. Darauf wird das Plattensystem in irgend einem Zeitmomente, den wir als Moment Null bezeichnen wollen, bei genau horizontaler Stellung vorsichtig auf eine planparallel geschliffene, 3 bis 8 cm dicke und exact horizontal gestellte Eisplatte von  $0^{\circ}$  herabgelassen, rasch mit einer auf  $0^{\circ}$  abgekühlten Hülle von Kupferblech überdeckt und der Abkühlung überlassen. Nach Ablauf einer sehr kurzen Zeit ist die untere Kupferplatte auf Null Grad abgekühlt und bleibt von da an genau auf dieser Temperatur, da das bedeutende Gewicht des Plattensystems das sich unter der untern Fläche der untern Platte bildende Schmelzwasser unmittelbar nach seiner Bildung herauspresst und die untere Fläche der letztgenannten Platte so kräftig an die Eisfläche andrückt, dass es Mühe macht, diese Verbindung zu lösen. Es entsteht nun eine stetige Wärmestömung aus der obern, wärmern Kupferplatte heraus durch die Flüssigkeitsslamelle hindurch nach der untern Kupferplatte hin. Dadurch sinkt die Temperatur der obern Kupferplatte und jeder horizontalen Schicht der Flüssigkeitsslamelle im Laufe der Zeit nach einem leicht zu ermittelnden Gesetz, und es lässt sich aus dem gemessenen zeitlichen Verlaufe der Temperatur irgend einer Flüssigkeitsschicht die Grösse des Wärmeleitungsvermögens der Flüssigkeit berechnen. Als Flüssigkeitsschicht, deren zeitlichen Temperaturverlauf wir messend verfolgen, wählen wir die obere Grenzschicht der Lamelle, weil sich für diese der Temperaturverlauf in einfacher und schärfster Weise ermitteln lässt. Die Temperatur dieser obern Grenzfläche ist nämlich in jedem Zeitmomente gleich der Temperatur der untern Grenzfläche

der oben  
lässt sich  
momenta  
beliebig  
Misst m  
beliebig  
damit zu  
obern G

Bei  
keitssch  
anordnu  
Vorgäng  
kann, u  
ausgeföh  
gefältsch  
Flüssigt  
Vorthei  
Vorauss  
— die  
manent  
des Ap  
durch  
Temperi  
durch S

Es  
wesenhe  
festen  
leitung  
Substan  
von gle  
und di  
Flächen  
Fläche  
keitslam

2.

die Te  
platte  
nutzten

der obern Kupferplatte; von der letztern Temperatur aber lässt sich leicht einsehen, dass sie in jedem beliebigen Zeitmomente gleich der gleichzeitigen Temperatur irgend eines beliebigen Massenelementes der obern Kupferplatte ist. Misst man also den zeitlichen Verlauf der Temperatur einer beliebigen Stelle der obern Kupferplatte, so erhält man damit zugleich den zeitlichen Verlauf der Temperatur der obern Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle.

Bei dieser Versuchsanordnung sind die dichtesten Flüssigkeitsschichten immer am tiefsten gelegen; diese Versuchsanordnung lässt also den hauptsächlichsten Fehler, der die Vorgänge der Wärmeleitung in Flüssigkeiten leicht trüben kann, und der in der That die Resultate mehrerer der bisher ausgeführten Untersuchungen in der erheblichsten Weise gefälscht hat — die Wärmefortführung auf dem Wege der Flüssigkeitsströmungen — prinzipiell fortfallen. Ein weiterer Vortheil dieser Versuchsmethode besteht darin, dass die eine Voraussetzung in der zu entwickelnden Theorie der Methode — die untere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle habe permanent die Temperatur  $0^{\circ}$  — immer erfüllt ist; die Schwere des Apparats sorgt selbst dafür, dass alles Schmelzwasser durch Verdrängung beseitigt wird, und keine allmähliche Temperatursteigerung der untern Grenzfläche der Lamelle durch Stagnation des Schmelzwassers eintritt.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die Anwesenheit der drei kleinen planparallelen Stückchen eines festen schlechten Wärmeleiters den Vorgang der Wärmeleitung in der Flüssigkeitslamelle kaum modifizirt. Diese Substanzen haben ein Wärmeleitungsvermögen, das nahezu von gleicher Größenordnung ist wie das der Flüssigkeiten, und die Summe der diesen drei Stückchen zukommenden Flächen macht noch nicht den fünfhundertsten Theil der Fläche aus, durch welche die Wärmeleitung in der Flüssigkeitslamelle vor sich geht.

2. Die Annahme, dass in jedem beliebigen Zeitmomente die Temperatur aller Massenpunkte der obern Kupferplatte dieselbe ist, bildet eine der Grundlagen der benutzten Methode. Da man vielleicht wegen der ganz be-

trächtlichen Dicke der benutzten Platte geneigt sein dürfte, diese Annahme nur als grobe Annäherung gelten zu lassen, halte ich es für angemessen, die volle Richtigkeit dieser Annahme jedem Zweifel zu entrücken.

Sämmtliche Volumenelemente der beiden Kupferplatten und der eingeschalteten Flüssigkeitslamelle mögen die anfängliche Temperatur  $U$  haben. In dem Zeitmomente  $t = 0$  werde das ganze Plattensystem in horizontaler Stellung auf eine ebene Eisplatte gestellt und gleichzeitig einer Umgebung von  $0^\circ$  ausgesetzt. Die untere Kupferplatte (und damit auch die untere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle) wird in sehr kurzer Zeit auf Null Grad abgekühlt, und es entwickelt sich ein continuirlicher Wärmestrom von abnehmender Stärke aus der obern Kupferplatte heraus durch die Flüssigkeitslamelle hindurch gegen die untere Kupferplatte hin. Gleichzeitig gibt die obere Kupferplatte von ihrer obern Basisfläche und ihrer Mantelfläche Wärme auf dem Wege der äussern Wärmeleitung an die kühtere Umgebung ab. Es soll die Temperaturvertheilung bestimmt werden, die infolge dieser Vorgänge der Wärmeleitung in irgend einem Zeitmomente in der oberen Kupferplatte stattfindet.

Es möge ein cylindrisches Coordinatensystem  $(x, r, \varphi)$  der Betrachtung zu Grunde gelegt werden, dessen Axe mit der Axe der cylindrischen Platte coincidirt, und dessen Nullpunkt in der untern Basisfläche der Kupferplatte liegt. Die Dicke der Platte sei  $A_1$ , ihr Radius sei  $R$ ; die Dichte, die specifische Wärme und die innere Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers sollen mit  $\varrho_1, c_1, k_1$  bezeichnet sein. Da bei den soeben geschilderten Vorgängen der Wärmeleitung die Wärmeströmung von der Richtung  $\varphi$  unabhängig ist, so hat die Temperatur  $u$  in jedem Zeitmomente  $t$  und in jedem Massenelemente im Innern der Platte folgende partielle Differentialgleichung zu erfüllen:

$$(1) \quad \varrho_1 c_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\}.$$

Dieser linearen partiellen Differentialgleichung liegt natürlich die Annahme zu Grunde, dass die drei Elemente:

Dichte  
Kupfer  
heriger  
dieser  
und d  
mit st  
Wärme  
ansteig  
nahme  
Sachver  
sein, d  
der K  
Grade

A

Genüg  
der ob  
erfüllt

(2)

wo h  
von K

E

Gleich

(3)

I  
Grenz  
gewin  
elemen  
Grenz  
Flüss  
durch  
zugef  
unter  
das i  
Flüss  
Grenz

Dichte, specifische Wärme und Wärmeleitungsvermögen des Kupfers von der Temperatur unabhängig sind. Die bisherigen Erfahrungen lehren, dass diese Annahme für keines dieser drei Elemente genau zutrifft, dass vielmehr die Dichte und das Wärmeleitungsvermögen ausserordentlich langsam mit steigender Temperatur abnehmen, während die specifische Wärme in messbarer Weise mit wachsender Temperatur ansteigt. Die Folgerungen aus der oben gemachten Annahme können also nur Annäherungen an den wirklichen Sachverhalt sein; sie werden aber sehr grosse Annäherungen sein, da das Intervall, innerhalb dessen sich die Temperatur der Kupferplatte in unseren Versuchen bewegt, nur wenige Grade umfasst.

Ausserdem hat die Temperatur  $u$  vier Grenzgleichungen Genüge zu leisten. Für die an Luft grenzenden Elemente der oberen Basisfläche muss in jedem Momente die Gleichung erfüllt sein:

$$(2) \quad k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=J_1} + h_1 u_{x=J_1} = 0,$$

wo  $h_1$  die Grösse des äussern Wärmeleitungsvermögens von Kupfer in Luft bedeutet.

Für alle Elemente der Mantelfläche gilt die analoge Gleichung:

$$(3) \quad k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R} + h_1 u_{r=R} = 0.$$

Die auf die untere Basisfläche der Platte bezügliche Grenzgleichung enthält die Thatsache, dass der Wärmegegewinn jedes Elementes dieser Grenzfläche in jedem Zeitelement gleich Null ist, dass also jedem Elemente dieser Grenzfläche in jedem Zeitelemente soviel Wärme durch die Flüssigkeitsleitung in der Lamelle entzogen wird, als es durch die metallische Leitung aus der Kupfermasse heraus zugeführt bekommt. Nennen wir die Temperatur in dieser untern Basisfläche  $u_{x=0}$ , und bezeichnen wir die Dicke und das innere Wärmeleitungsvermögen der äusserst dünnen Flüssigkeitslamelle mit  $A$  und  $k$ , so ist der Inhalt dieser Grenzgleichung:

$$(4) \quad k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} - \frac{k}{A} \cdot u_{x=0} = 0.$$

Die letzte Grenzgleichung bildet die Anfangsbedingung:

$$(5) \quad u = U \left\{ \begin{array}{l} \text{für } t = 0 \\ \text{und für alle } x \text{ und } r \end{array} \right\}.$$

Eine einfache Lösung, welche der Differentialgleichung (1) genügt, ist:

$$u = [A \cos qx + B \sin qx] I_{mr}^0 e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} (q^2 + m^2) t}$$

wo  $I_{mr}^0$  die Bessel'sche Function erster Gattung mit dem Index 0 und dem Argument  $mr$  bezeichnet, und wo die  $A$ ,  $B$ ,  $q$  und  $m$  4 Constante bedeuten, deren Werthe aus den obigen vier Grenzgleichungen heraus zu bestimmen sind.

Die Grenzgleichung (4) liefert zunächst die Beziehung:

$$B = \frac{k}{k_1} \frac{1}{Aq} \cdot A,$$

wodurch die angegebene einfache Lösung die Form annimmt:

$$u = A \left( \cos qx + \frac{k}{k_1} \frac{1}{Aq} \sin qx \right) I_{mr}^0 e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} (q^2 + m^2) t}$$

Zur Bestimmung der Grösse  $q$  dient die Grenzgleichung (2). Soll die vorliegende einfache Lösung der Grenzgleichung (2) genügen, so müssen für  $q$  diejenigen Werthe gewählt werden, welche sich aus der Gleichung ergeben:

$$-k_1 q \sin q A_1 + \frac{k}{A} \cos q A_1 + h_1 \cos q A_1 + h_1 \frac{k}{k_1} \frac{1}{Aq} \sin q A_1 = 0$$

oder:

$$-q A_1 \left[ 1 - \frac{h_1}{k_1} \cdot \frac{k}{k_1} \frac{A_1^2}{A} \frac{1}{(q A_1)^2} \right] \sin q A_1 + \frac{k}{k_1} \frac{A_1}{A} \left[ 1 + \frac{h_1}{k} A \right] \cos q A_1 = 0.$$

In unseren Versuchen war  $A_1$  in runder Zahl gleich 1 cm; die Dicke  $A$  der Flüssigkeitslamelle betrug ca. 0,2 cm. Aus den weiter unten angeführten Beobachtungsreihen ergibt sich für  $h_1$  0,006 und für  $k$  im Mittel für alle Flüssigkeiten etwa 0,050, falls für die Auswerthung dieser beiden Wärmeleitungsvermögen die Einheiten: Gramm, Centimeter, Minute

und 1° Celsius  
selben  
Messung  
und 66.  
hebliche  
Gleichu

in welche  
Der  
ist ange  
grösser

Ert  
Lösung  
 $\frac{\pi}{A_1}, \frac{2\pi}{A_1},$   
jetzt an  
wir eine  
zugleich  
gemeine

+  $A_2$

Die  
gleichu  
chung,  
transcen

Die ve  
können  
Bessel's  
Da  $\frac{h_1}{k_1}$   
Ann. d.

und  $1^{\circ}\text{C}$ . benutzt werden. Der Werth von  $k_1$  liegt, in denselben Einheiten ausgedrückt, nach meinen und anderer Messungen für die verschiedenen Kupfersorten zwischen 45 und 66. Unter diesen Umständen darf man, ohne einen erheblichen Fehler in die Rechnung einzuführen, die vorstehende Gleichung durch die folgende einfachere ersetzen:

$$q A_1 \sin q A_1 = \frac{k}{k_1} \cdot \frac{A_1}{A} \cdot \cos q A_1 = 0,004 \cos q A_1,$$

in welcher für  $k_1$  der Mittelwerth 55 eingeführt ist.

Der erste Wurzelwerth dieser transzendenten Gleichung ist angenähert  $q A_1 = \frac{1}{16}$ ; die zweite Wurzel ist ein wenig grösser als  $\pi$ , die dritte etwas grösser als  $2\pi$  u. s. w.

Ertheilen wir also der Grösse  $q$  der obigen einfachen Lösung die (nur angenähert berechneten) Werthe  $\frac{1}{16} \frac{1}{A_1}$ ,  $\frac{\pi}{A_1}$ ,  $\frac{2\pi}{A_1}$ , ... [diese Wurzelwerthe sollen Kürze halber von jetzt an mit  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , ... bezeichnet werden], so erhalten wir eine einfache Lösung der Differentialgleichung, welche zugleich auch die Bedingungsgleichung (2) erfüllt. Eine allgemeinere Lösung ist dann:

$$u = \left\{ A_1 \left( \cos q_1 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{A q_1} \sin q_1 x \right) e^{-\frac{k_1}{e_1 c_1} q_1^2 t} + \right. \\ \left. + A_2 \left( \cos q_2 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{A q_2} \sin q_2 x \right) e^{-\frac{k_1}{e_1 c_1} q_2^2 t} + \dots \right\} I_{mR}^0 e^{-\frac{k_1}{e_1 c_1} m^2 t}.$$

Diese allgemeinere Lösung hat nun weiter der Grenzgleichung (3) zu entsprechen. Sie entspricht dieser Gleichung, sobald die in ihr vorkommende Grösse  $m$  aus der transzendenten Gleichung bestimmt wird:

$$mR \frac{I_{mR}^1}{I_{mR}^0} = \frac{k_1}{k_1} R.$$

Die verschiedenen Wurzelwerthe ( $mR$ ) dieser Gleichung können aus den von Hansen berechneten Tafeln der Bessel'schen Functionen  $I_{mR}^0$  und  $I_{mR}^1$  entnommen werden. Da  $\frac{k_1}{k_1}$  nach den oben gemachten Angaben den Werth von

etwa  $\frac{1}{5000}$  besitzt, und der Radius  $R$  der Kupferplatte 8 cm beträgt, so hat die rechte Seite der letzten Gleichung den abgerundeten Werth  $\frac{1}{100}$ . Die unendlich vielen reellen Wurzelwerthe dieser Gleichung sind:

$$mR = 0,043; 3,84; 7,02; 10,7; \dots$$

und daraus ergeben sich die folgenden unendlich vielen reellen Werthe von  $m$ , welche die Bedingungsgleichung (3) befriedigen:

$$m_1 = \frac{0,043}{R}, \quad m_2 = \frac{3,84}{R}, \quad m_3 = \frac{7,02}{R}, \quad m_4 = \frac{10,7}{R}, \dots$$

Die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (1), welche sämmtliche Grenzgleichungen (2) bis (4) erfüllt, ist demnach:

$$u = \left\{ A_1 \left( \cos q_1 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{dq_1} \sin q_1 x \right) e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} q_1^2 t} + A_2 \left( \cos q_2 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{dq_2} \sin q_2 x \right) e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} q_2^2 t} + \dots \right\} \times \left\{ B_1 I_{m_1 r}^0 e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} m_1^2 t} + B_2 I_{m_2 r}^0 e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} m_2^2 t} + B_3 I_{m_3 r}^0 e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} m_3^2 t} + \dots \right\} \dots \quad (6).$$

Es bleibt jetzt noch übrig, die letzte Aufgabe zu lösen: die Constanten  $A_1, A_2, A_3, \dots$  und  $B_1, B_2, B_3, \dots$  so zu bestimmen, dass der Anfangsbedingung (5):

$$u = U \text{ für } t = 0 \text{ und für alle } x \text{ und } r$$

Rechnung getragen wird. Die gegebene allgemeine Lösung wird dieser Anfangsbedingung genügen, sobald die Constanten  $A_1, A_2, A_3, \dots$  und  $B_1, B_2, B_3, \dots$  so gewählt werden, dass:

$$(7) \quad U = A_1 \left( \cos q_1 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{dq_1} \sin q_1 x \right) + A_2 \left( \cos q_2 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{dq_2} \sin q_2 x \right) + \dots$$

und

$$(8) \quad 1 = B_1 I_{m_1 r}^0 + B_2 I_{m_2 r}^0 + B_3 I_{m_3 r}^0 + \dots$$

ist. Die strenge Bestimmung der Constanten  $A$  in der Gleichung (7) führt auf verwickelte Rechnungen; hier möge nur

eine sehr angenäherte Lösung der Aufgabe gegeben werden. Die Grössen:

$$\frac{k}{k_1} \frac{1}{Aq_1} \sin q_1 x, \frac{k}{k_1} \frac{1}{Aq_2} \sin q_2 x, \frac{k}{k_1} \frac{1}{Aq_3} \sin q_3 x, \dots$$

sind sehr klein gegenüber den Grössen

$$\cos q_1 x, \cos q_2 x, \cos q_3 x, \dots,$$

indem sie höchstens die Werthe  $\frac{1}{200}, \frac{1}{360}, \frac{1}{1380}, \dots$  erreichen. Mit sehr grosser Annäherung wird daher die Gleichung (7) durch die folgende ersetzt werden dürfen:

$$(7a) \quad U = A_1 \cos q_1 x + A_2 \cos q_2 x + A_3 \cos q_3 x + \dots$$

Für diese Gleichung lässt sich die Constantenbestimmung leicht ausführen. Wie Fourier zuerst gezeigt hat, gelten die Relationen:

$$\int_0^{A_1} \cos q_n x \cdot \cos q_m x \, dx = 0 \text{ für } n \text{ verschieden von } m$$

$$\text{und } \int_0^{A_1} \cos q_n x \cdot \cos q_n x \, dx = \frac{1}{2} \left( A_1 + \frac{\sin 2 q_n A_1}{2 q_n} \right)$$

Demnach ist

$$\int_0^{A_1} U \cos q_n x \, dx = U \frac{\sin q_n A_1}{q_n} = A_n \cdot \frac{1}{2} \left( A_1 + \frac{\sin 2 q_n A_1}{2 q_n} \right)$$

$$\text{oder } A_n = 2 U \frac{\sin q_n A_1}{q_n A_1} \frac{1}{\left( 1 + \frac{\sin 2 q_n A_1}{2 q_n A_1} \right)}.$$

Zur Bestimmung der Constanten  $B_n$  der Gleichung:

$$1 = B_1 I_{m_1, r}^0 + B_2 I_{m_2, r}^0 + B_3 I_{m_3, r}^0 + \dots$$

in welcher die  $m_1, m_2, m_3, \dots$  die successiven Wurzeln der transzententen Gleichung

$$m R \frac{J_{m R}^1}{J_{m R}^0} = \frac{h_1}{k_1} \cdot R$$

bedeuten, dienen die aus der Theorie der Bessel'schen Functionen bekannten Beziehungen:

$$\int_0^R r \cdot I_{m_n r}^0 \cdot I_{m_i r}^0 \cdot dr = 0 \text{ für } n \text{ verschieden von } i$$

$$\int_0^R r \cdot I_{m_n r}^0 \cdot I_{m_n r}^0 \cdot dr = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_1^2}{k_1^2 m_n^2} \right) R^2 \cdot \left( I_{m_n R}^0 \right)^2.$$

Durch Anwendung dieser Relationen auf die Gleichung (8) erhalten wir:

$$\frac{R}{m_n} I_{m_n R}^1 = B_n \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_1^2}{k_1^2 m_n^2} \right) R^2 \left( I_{m_n R}^0 \right)^2$$

$$\text{und daraus: } B_n = \frac{\frac{2}{R} I_{m_n R}^1}{\left( I_{m_n R}^0 \right)^2} \cdot \frac{1}{m_n R \left( 1 + \frac{k_1^2}{k_1^2 m_n^2} \right)}.$$

Zieht man die oben gegebenen Wurzelwerthe  $q_1 A_1, q_2 A_1, q_3 A_1, \dots$  in Betracht, so erkennt man leicht, dass der Coëfficient  $A_1$  fast genau gleich  $U$ , die Coëfficienten  $A_2, A_3, A_4, \dots$  aber von Null nur sehr wenig verschieden sind.

Aehnliches gilt von den Coëfficienten  $B_1, B_2, B_3, \dots$ . Durch Einführung der oben gegebenen Wurzelwerthe  $m_1 R, m_2 R, m_3 R, \dots$  in den für  $B_n$  angegebenen Werth ersieht man, dass  $B_1$  nahezu gleich 1 ist und  $B_2, B_3, B_4, \dots$  nahezu den Nullwerth haben.

Daraus folgt, dass in der oben gegebenen allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (1):

$$u = \left\{ A_1 \left( \cos q_1 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{A q_1} \sin q_1 x \right) e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} q_1^2 t} + A_2 \left( \cos q_2 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{A q_2} \sin q_2 x \right) e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} q_2^2 t} + \dots \right\} \times \\ \times \left\{ B_1 I_{m_1 r}^0 e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} m_1^2 t} + B_2 I_{m_2 r}^0 e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} m_2^2 t} + B_3 I_{m_3 r}^0 e^{-\frac{k_1}{q_1 c_1} m_3^2 t} + \dots \right\}$$

alle auf das erste Glied folgenden Glieder in beiden Klammern sehr klein sind gegenüber dem ersten Gliede. Da aber die Wurzelwerthe  $q_1, q_2, q_3, \dots$  nahezu in dem Verhältniss 1:20:40... und die Wurzelwerthe  $m_1, m_2, m_3, \dots$

ungefähr in dem Verhältniss 1:90:175 zunehmen, so sind diese auf das erste Glied folgenden Glieder in jeder der beiden Klammern sogar nach äusserst kurzen Zeiträumen völlig bedeutungslos gegenüber dem ersten Gliede jeder Klammer.

Die gesuchte Temperaturvertheilung in der cylindrischen Kupferplatte ist daher in jedem beliebigen Zeitmomente  $t$  (mit Ausschluss der allerersten Zeitmomente nach Beginn des Prozesses der Wärmeleitung) durch die folgende Form gegeben:

$$u = U \left( \cos q_1 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{A q_1} \sin q_1 x \right) I_{m_1 r}^0 e^{-\frac{k_1}{e_1 c_1} (q_1^2 + m_1^2) t}$$

oder, wenn die Werthe  $q_1 = \frac{1}{16} \frac{1}{A_1}$  und  $m_1 = \frac{0,043}{R}$  und  $\frac{k}{k_1} \frac{A}{A_1} = \frac{1}{220}$  eingesetzt werden:

$$u = U \left[ \cos \left( \frac{1}{16} \frac{x}{A_1} \right) + \frac{1}{220} \frac{\sin \left( \frac{1}{16} \frac{x}{A_1} \right)}{\left( \frac{1}{16} \frac{x}{A_1} \right)} \right] I_{\frac{0,043}{R}, r}^0 e^{-\frac{k_1}{e_1 c_1} \left[ \left( \frac{1}{16} \frac{x}{A_1} \right)^2 + \left( \frac{0,043}{R} \right)^2 \right] t}$$

Diese Form des Schlussresultats lässt aber sofort erkennen, dass sich die Temperatur keines Massenpunktes der cylindrischen Kupferplatte in irgend einem Zeitmoment von dem Mittelwerthe der Temperatur der Platte um mehr als höchstens  $\frac{1}{220}$  dieses Mittelwerths entfernt. Der von der Kupferplatte erfüllte Raum ist also in jedem Zeitmoment ein isothermischer; die untere Begrenzungsfläche der Kupferplatte und mithin auch die obere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle ist in jedem Augenblicke eine isotherme Fläche. Messen wir in irgend einem Zeitmoment die Temperatur irgend eines Massenpunktes der Kupferplatte, so erhalten wir in dieser Temperatur die in diesem Moment vorhandene Temperatur der oberen Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle.

3. Nachdem der Nachweis gegeben worden ist, dass in jedem Augenblicke die obere Kupferplatte ein isothermer Raum und die obere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle eine isotherme Fläche von demselben Temperaturwerthe ist, soll jetzt die Temperaturvertheilung näher betrachtet werden, die

sich in einem beliebigen Zeitmomente während des Prozesses der Leitung der Wärme aus der oberen Kupferplatte heraus durch die Flüssigkeitslamelle hindurch in der letzteren herstellt. Zur Aufstellung der Differentialgleichung und der verschiedenen Grenzgleichungen, aus denen heraus diese Temperaturvertheilung ermittelt werden kann, legen wir, wie oben, ein cylindrisches Coordinatensystem zu Grunde ( $x, r, \varphi$ ), dessen Axe mit der Axe der Flüssigkeitslamelle zusammenfällt, und dessen Nullpunkt in der untern Grenzfläche der Lamelle liegt. Nach unserer Versuchsanordnung ist auch in der Wärmeleitung innerhalb der Flüssigkeitslamelle die Wärmeströmung unabhängig von der Richtung der  $\varphi$ , und es hat daher die partielle Differentialgleichung, welche die Temperaturbewegung innerhalb der Lamelle ausdrückt, die Form:

$$(1) \quad \varrho \cdot c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = k \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\},$$

wenn  $\varrho$  und  $c$  Dichte und specifische Wärme und  $k$  die Grösse der inneren Wärmeleitungsfähigkeit der betrachteten Flüssigkeit bedeuten. Von diesen drei Grössen nehmen wir zunächst an, dass sie unabhängig von der Temperatur  $u$  sind.

Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung hat fünf Grenzgleichungen zu genügen:

$$(2) \quad \text{Für } x = 0 \text{ ist } u = 0 \text{ für alle } t,$$

$$(3) \quad \text{für } x = A \text{ ist } u \text{ unabhängig von } r \text{ für alle } t.$$

Eine weitere für  $x = A$  gültige Grenzgleichung hat die Thatsache auszudrücken, dass sich der Wärmeverrath der oberen Kupferplatte auf zweifache Weise vermindert: durch innere Wärmeleitung innerhalb der Flüssigkeitslamelle gegen die untere, auf  $0^\circ$  abgekühlte Kupferplatte hin und durch äussere Wärmeleitung von der an Luft grenzenden oberen Basis- und der Mantelfläche aus in die auf  $0^\circ$  abgekühlte Umgebung hinein. Die Wärmemenge, welche die Platte auf dem ersten Wege in der Zeiteinheit verliert, ist gleich  $F \cdot k \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=A}$ , wenn  $F$  die Grösse der Basisfläche der Platte bedeutet; machen wir die Annahme, dass die äussere Wärme-

leitungsgrösse  $h_1$  unabhängig von der Temperatur ist, und bezeichnen wir die Summe von oberer Basisfläche und Mantelfläche der oberen Kupferplatte mit  $F_1$ , so ist die Wärmemenge, welche die obere Platte durch die äussere Wärmeleitung in derselben Zeit verliert, gleich  $h_1 F_1 \cdot u_{x=\delta}$  zu setzen. Die Summe dieser beiden in der Zeiteinheit erfolgenden Wärmeverluste ist gleich der gesammten, während dieser Zeit erfolgenden Wärmeabnahme der oberen Platte, d. h. gleich  $-M_1 c_1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=\delta}$ , wo  $M_1$  die Masse und  $c_1$ , wie oben, die specifische Wärme der Kupferplatte bezeichnet. Als weitere Grenzgleichung gilt also:

$$(4) \quad \text{für } x = \delta \text{ ist: } -M_1 c_1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=\delta} = h F \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=\delta} + h_1 F_1 u_{x=\delta}.$$

Für alle Orte der Mantelfläche der cylindrischen Flüssigkeitslamelle hat die Lösung der obigen Differentialgleichung die Bedingung zu erfüllen:

$$(5) \quad \text{für } r = R: \quad h \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R} + h u_{r=R} = 0.$$

Endlich muss die gesuchte Lösung der Differentialgleichung auch die anfängliche, die zur Zeit  $t = 0$ , bestehende Temperaturvertheilung enthalten. Es möge zu Anfang durch das ganze Plattensystem dieselbe constante Temperatur  $U$  geherrscht haben. Dann lautet die letzte zu erfüllende Grenzgleichung:

$$(6) \quad \text{für } t = 0: \quad u = U = \text{unabhängig von } x \text{ und } r.$$

Eine einfache Lösung der Differentialgleichung (1) ist:

$$(7) \quad u = A e^{-\frac{k}{\varrho c} q^2 t} \sin qx + B e^{-\frac{k}{\varrho c} (p^2 + m^2) t} \sin px I_m^0 r.$$

Diese Lösung genügt der Grenzgleichung (2); damit sie zugleich auch die Bedingungsgleichung (3) erfülle, muss die Constante  $p$  als Wurzel der Gleichung  $\sin(p\delta) = 0$  gewählt werden, muss die Constante  $p$  also den Werth  $\frac{n\pi}{\delta}$  haben, wo  $n$  der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ... bezeichnet. Der Bedingungsgleichung (5) ist genügt, sobald die Constante  $m$  als Wurzel der transzendenten Gleichung:

$$mR \frac{I_{m,R}^1}{I_{m,R}^0} = \frac{k}{\varrho c} R$$

gewählt wird. Belegen wir die unendlich vielen reellen Werthe von  $m$ , welche dieser Gleichung entsprechen, der Reihe nach mit den Zeichen  $m_1, m_2, m_3 \dots$ , so können wir als allgemeinere Lösung der obigen Differentialgleichung, welche dreien der obigen fünf Grenzgleichungen genügt, die folgende Form nehmen:

$$(8) \quad \left\{ u = A e^{-\frac{k}{\varrho c} q^2 t} \sin qx + \left\{ B_1 \sin \left( \frac{\pi}{A} x \right) e^{-\frac{k \pi^2}{\varrho c A^2} t} + B_2 \sin \left( \frac{2\pi}{A} x \right) e^{-\frac{k 4\pi^2}{\varrho c A^2} t} + B_3 \sin \left( \frac{3\pi}{A} x \right) e^{-\frac{k 9\pi^2}{\varrho c A^2} t} + \dots \right\} \times \right. \\ \left. \left\{ C_1 I_{m_1, r}^0 e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t} + C_2 I_{m_2, r}^0 e^{-\frac{k}{\varrho c} m_2^2 t} + C_3 I_{m_3, r}^0 e^{-\frac{k}{\varrho c} m_3^2 t} + \dots \right\} \right\}$$

In diesem Ausdrucke wären nun noch die Constanten  $A$  und  $q$ , die  $B_n$  und die  $C_n$  so zu bestimmen, dass den beiden Grenzgleichungen (4) und (6) Genüge geleistet wird. Diese Bestimmung mit aller Strenge durchzuführen, ist mir nicht gelungen. Ich habe diese Schwierigkeit in folgender Weise, unbeschadet der Genauigkeit der Berechnung der auszuführenden Versuche, zu umgehen vermocht. Die zuletzt angegebene Lösung für  $u$  lässt ersehen, dass durch passende Wahl der Dicke  $A$  der Flüssigkeitslamelle die Grösse  $\frac{k}{\varrho c A^2} \pi^2$  so gross gemacht werden kann, dass schon nach Ablauf einiger Secunden seit Anfang des Processes der Wärmeleitung jedes Glied innerhalb der ersten Klammer einen verschwindend kleinen Werth annimmt. In den weiter unten mitgetheilten Versuchen war  $A$  von der Ordnung  $\frac{1}{2}$  cm; die Grösse  $\frac{k}{\varrho c}$  ergab sich für alle untersuchten Flüssigkeiten als nahezu constant und zwar nahezu gleich 0,070 (unter Zugrundelegung der oben genannten Einheiten der Länge und der Zeit). Es war also für alle untersuchten Flüssigkeiten  $\frac{k}{\varrho c} \frac{\pi^2}{A^2} n^2 = 17,5 n^2$ . Unter diesen Umständen hatte jedes der

innerhalb  
Glieder  
ordentli  
peratur  
isotherm  
der Lan  
theilung  
gegeben

Zur B  
gleichu

Der vo  
falls fü

$M_1$

d. h. d

gesetzte  
zeln  $q$   
werden  
den we  
wir n  
fünfte  
Wurze

einges  
gabe.

(9)

In di

innerhalb der ersten der obigen beiden Klammern stehenden Glieder schon nach Ablauf weniger Secunden einen ausserordentlich geringen Werth. Von dieser Zeit an ist die Temperaturvertheilung in der Lamelle unabhängig von  $r$ ; die isothermen Flächen laufen dann den ebenen Grenzflächen der Lamelle parallel, und der Ausdruck der Temperaturvertheilung reducirt sich auf das erste Glied der zuletzt angegebenen Lösung:

$$u = A e^{-\frac{k}{qc} q^2 t} \sin qx.$$

Zur Bestimmung der Constante  $q$  dient nun die Grenzgleichung (4):

$$-M_1 c_1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=s} = k F \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=s} + h_1 F_1 u_{x=s}.$$

Der vorstehende Ausdruck für  $u$  erfüllt diese Grenzgleichung, falls für die Constante  $q$  eine der Wurzeln der Gleichung:

$$M_1 c_1 \cdot \frac{k}{qc} \cdot q^2 \cdot \sin(qA) = k F q \cos(qA) + h_1 F_1 \sin(qA),$$

d. h. der Gleichung:

$$qA \operatorname{tg} qA = \frac{F A q c}{M_1 c_1 \left( 1 - \frac{h_1 F_1 q c A^2}{k M_1 c_1} \cdot \frac{1}{(qA)^2} \right)} \dots \dots \dots$$

gesetzt wird. Auf die Berechnung der unendlich vielen Wurzeln  $q$  dieser Gleichung, sie mögen mit  $q_1, q_2, q_3 \dots$  bezeichnet werden, soll hier nicht näher eingegangen werden; wir werden weiter unten darauf zurückkommen. Einstweilen brauchen wir nur zu wissen, dass  $q_1$  im ersten,  $q_3$  im dritten,  $q_5$  im fünften Quadranten u. s. w. liegt. Wird irgend eine dieser Wurzeln für  $q$  in die Form:

$$A \sin qx e^{-\frac{k}{qc} q^2 t}$$

eingesetzt, so resultirt eine singuläre Lösung unserer Aufgabe. Die allgemeine Lösung hat also die Form:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = A_1 \sin q_1 x e^{-\frac{k}{qc} q_1^2 t} + A_2 \sin q_2 x e^{-\frac{k}{qc} q_2^2 t} + \\ \quad + A_3 \sin q_3 x e^{-\frac{k}{qc} q_3^2 t} + \dots \dots \end{array} \right.$$

In dieser allgemeinen Lösung wären nun noch die Con-

stanten  $A_1, A_2, A_3, \dots$  so zu bestimmen, dass der Anfangsbedingung:

$$u = U \text{ für } t = 0 \text{ und für alle } x$$

Rechnung getragen wird. Es wären also die Werthe für  $A_1, A_2, A_3, \dots$  zu ermitteln, welche die Gleichung:

$$u_0 = A_1 \sin q_1 x + A_2 \sin q_2 x + A_3 \sin q_3 x + \dots$$

richtig machen. Die Berechnung dieser Constanten mag indess hier unausgeführt bleiben, da für die auszuführenden Versuche die numerischen Werthe dieser Constanten gar nicht bekannt zu sein brauchen.

Die Quadrate der Wurzelwerthe  $q_1, q_2, q_3, \dots$  nehmen mit wachsender Indexzahl rasch an Grösse zu; in den später zu besprechenden Versuchen über die Wärmeleitung des Wassers war z. B.:

$$q_1^2 = 4,778, q_2^2 = 194,88, q_3^2 = 751,31.$$

Die Werthe der einzelnen singulären Lösungen in dem allgemeinen Ausdrucke (9) nehmen demnach mit grösser werdender Indexzahl ausserordentlich rasch ab, und um so rascher, je länger der Zeitraum  $t$  ist, der seit Beginn des Processes der Wärmeleitung abgelaufen ist. Nach Ablauf einer gewissen Zeit kann also schon das zweite Glied des Ausdruckes (9) neben dem ersten vernachlässigt werden. Diese Zeiltlänge war wegen der sehr klein gewählten Dicke  $\Delta$  der Flüssigkeitslamelle in allen ausgeführten Beobachtungsreihen eine ausserordentlich kurze. In der Untersuchung der Wärmeleitung des Wassers war z. B. schon nach Ablauf von 30 Secunden seit Beginn der Wärmeleitung der Werth des Exponentialfactors des zweiten Gliedes des obigen Ausdrucks auf die kleine Grösse  $\frac{1}{100}$  herabgesunken. Und selbst für die schlechtesten der untersuchten flüssigen Wärmeleiter trat das nämliche schon nach Verlauf von circa 60 Secunden ein.

Es ergibt sich also: Wird von dem Vorgange der Wärmeleitung in der Flüssigkeitslamelle während der ersten 60 Secunden abgesehen — diese Zeiltlänge möge mit  $T$  bezeichnet werden — und wird nur der Verlauf der Temperaturbewegung in den auf die ersten 60 Secunden folgenden Zeitmomenten in Betracht gezogen, so ist der exacte

Ausdruck  
einem  
Endpu  
findet,

$u =$

D  
Messu  
Flüssig  
Kupfe  
durch

u  
Aus d  
kann  
sobald  
sind.  
ander  
peratu  
gefunden  
diesen  
ableit

4  
hat z  
Wärme  
der c  
einige  
tempo  
des z  
Verfa  
Mome  
leiste  
der c

Ausdruck derjenigen Temperaturvertheilung, die in irgend einem Zeitmomente, der um  $t$  Zeiteinheiten später als der Endpunkt von  $T$  eintritt, in der Flüssigkeitslamelle stattfindet, der folgende:

$$u = A_1 e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^1 T} \sin q_1 x \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^1 t} = U_1 \cdot \sin q_1 x \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^1 t}.$$

Die benutzte Beobachtungsmethode gestattet nur die Messung der Temperatur der oberen Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle (die Messung der Temperatur der oberen Kupferplatte); der zeitliche Verlauf dieser Temperatur ist durch den Ausdruck gegeben:

$$u_{z=\vartheta} = u' = U_1 \sin q_1 \vartheta \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^1 t} = U'_1 \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^1 t}.$$

Aus dem gemessenen zeitlichen Verlaufe dieser Temperatur kann sodann das Wärmeleitungsvermögen  $k$  ermittelt werden, sobald die Grössen  $\varrho$  und  $c$ , sowie die Constante  $q_1$  bekannt sind. Sind für eine Reihe von (etwa gleichweit von einander abstehenden) Zeitmomenten  $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  die Temperaturen der oberen Kupferplatte gleich  $u'_0, u'_1, u'_2, u'_3, \dots$  gefunden worden, so ist das Wärmeleitungsvermögen  $k$  aus diesem System beobachteter Grössen durch folgende Formel ableitbar:

$$k = \frac{1}{t_{i+n} - t_i} \cdot \frac{1}{q_1^2} \cdot \varrho c \cdot \lg \left( \frac{u'_i}{u'_{i+n}} \right).$$

4. Die kleine Dicke  $\vartheta$  der benutzten Flüssigkeitslamellen hat zur Folge, dass trotz der verhältnissmässig geringen Wärmeleitungsfähigkeit aller Flüssigkeiten die Temperatur der oberen Kupferplatte so rasch abfällt, dass sie schon in einigen Minuten von ihrem anfänglichen Werthe (Zimmer-temperatur) auf nahezu Null Grad herabsinkt. Zur Messung des zeitlichen Verlaufes dieser Temperatur muss daher ein Verfahren benutzt werden, das im Stande ist, richtige Momentanwerthe dieser Temperatur liefern zu können. Dieses leistet eine thermoelectrische Bestimmung der Temperatur der oberen Kupferplatte.

In der Gegend der Mitte der oberen Basisfläche dieser

Kupferplatte wurden zwei sehr dünne Drähte zweier verschiedener Metalle eingelöthet. Die andere Löthstelle dieser Drähte wurde dauernd in Eis auf 0° erhalten. Diese Thermo-elemente waren aus solchen Metallen gebildet, dass innerhalb der nur um wenige Grade voneinander abstehenden Temperaturen der beiden Löthstellen die erregten thermoelectromotorischen Kräfte den wirkenden Temperaturdifferenzen der Löthstellen bis auf verschwindend kleine Abweichungen proportional waren. In dem Zeitmomente, den wir oben als Moment  $T$  bezeichnet haben, wurde das Thermo-element in den Kreis eines aperiodisch gestellten Galvanometers eingeschaltet und nach Verlauf von weiteren 20 Secunden wurde der Stand des Galvanometermagnets mit Hülfe von Fernrohr, Spiegel und Scala bei gut wärmeleitenden Flüssigkeiten von 10 zu 10 Secunden, bei schlechter leitenden von 15 zu 15 Secunden abgelesen. Es lässt sich leicht einsehen, dass die in den einzelnen Zeitmomenten abgelesenen Abweichungen des Galvanometermagnets von seiner Ruhelage ein genaues relatives Maass der Temperaturen geben, welche die obere Kupferplatte, mithin auch die obere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle in diesen Zeitmomenten besitzt.

Der Galvanometermagnet möge sich zu Anfang im Ruhzustande befunden haben. Im Zeitmomente  $T$  werde das Galvanometer plötzlich in den thermoelectricischen Kreis eingeschaltet und dauernd darin gelassen. Um den Ausschlag zu erhalten, welchen der Galvanometermagnet nach Verlauf der Zeitlänge  $t$  seit dem Momente der Schliessung zeigt, gehen wir von der allgemeinen Gleichung aus, welche die Bewegung des durch den thermoelectricischen Strom abgelenkten Magnets bestimmt. Zur Zeit  $t$  ist die Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen des Thermo-elements:

$$u' = U_1 \cdot e^{-\frac{k}{\theta c} q_1^2 \cdot t};$$

die in diesem Zeitmomente wirksame thermoelectromotorische Kraft ist dann nach der oben gemachten Bemerkung:

$$E = \alpha \cdot U' \cdot e^{-\frac{k}{\theta c} q_1^2 \cdot t}.$$

Nennen wir  $W$  die Summe aller Widerstände des thermoelectricischen Kreises, so ist die Intensität des zur Zeit  $t$  erzeugten thermoelectricischen Stromes:

$$i = \alpha \frac{U}{W} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t};$$

das Drehungsmoment, welches dieser Strom auf den Galvanometermagnet ausübt, ist [sobald die Ablenkung einige Grade nicht übersteigt]:

$$M \cdot G \cdot \frac{\alpha U}{W} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t};$$

wo  $M$  das Moment des Magnets und  $G$  die Constante des Galvanometers bezeichnet. Wird das Trägheitsmoment des Magnets  $Q$ , die Grösse des Dämpfungsmomentes für die Einheit der Winkelgeschwindigkeit  $D$ , die horizontale Componente der wirksamen magnetischen Richtkraft  $H$  und die Grösse des zur Zeit  $t$  vorhandenen Ausschlages des Magnets  $x$  genannt, so ist die allgemeine Bewegungsgleichung des Galvanometermagnets:

$$Q \frac{d^2 x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + MHx - MG \cdot \frac{\alpha U}{W} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t} = 0,$$

$$\text{oder } \frac{d^2 x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} + Bx - Ce^{-gt} = 0,$$

wenn zur Abkürzung

$$A = \frac{D}{Q} \quad | \quad B = \frac{MH}{Q} \quad | \quad C = \frac{MG \alpha U}{Q \cdot W} \quad | \quad g = \frac{k}{\varrho c} q_1^2$$

gesetzt wird. Das allgemeine Integral dieser Bewegungsgleichung hat die Form:

$$x = P_1 e^{-\lambda_1 t} + P_2 e^{-\lambda_2 t} + Ne^{-gt},$$

wo  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die (reellen) Grössen

$$\lambda_1 = \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B} \quad \text{bezeichnen, } N \text{ den Werth } \frac{C}{g^2 - Ag + B}$$

$$\lambda_2 = \frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}$$

darstellt, und wo  $P_1$  und  $P_2$  Constante sind, welche durch den Anfangszustand des Magnets bestimmt werden müssen.

Zur Zeit  $t = 0$  war der Ausschlag des Magnets Null, seine Winkelgeschwindigkeit hatte aber einen von Null verschiedenen Werth, etwa den Werth  $\gamma_0$ . Die beiden Constanten  $P_1$  und  $P_2$  sind also durch die Gleichungen bestimmt:

$$0 = P_1 + P_2 + N$$

$$-\gamma_0 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + gN,$$

und der Ausschlag des Galvanometers zur Zeit  $t$  ist:

$$x = \left( -\frac{\gamma_0}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{N(g - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) e^{-\lambda_1 t} +$$

$$+ \left( \frac{\gamma_0}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{N(g - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) e^{-\lambda_2 t} + Ne^{-gt}.$$

Die Werthe  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  wurden in bekannter Weise möglichst gross gegenüber  $g$  gemacht; in allen den ausgeführten Versuchsreihen waren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gegen 160 bis 290 mal so gross als  $g$ . Infolge davon waren schon wenige Secunden nach der Schliessung des thermoelectricischen Stromes die beiden ersten Glieder des vorstehenden Ausdruckes völlig bedeutungslos gegenüber dem letzten Gliede; der Ausschlag des Galvanometermagnets war also (abgesehen von den ersten Secunden nach der Schliessung) in jedem Zeitmomente  $t$  durch die Form gegeben:

$$x = Ne^{-gt} = \frac{MG \cdot \alpha \cdot U}{Q \cdot W} \cdot \frac{1}{\left( \frac{k}{qc} q_1^2 \right)^2 - A \frac{k}{qc} q_1^2 + B} \cdot e^{-\frac{k}{qc} q_1^2 t}.$$

Die Ablenkung des Galvanometermagnets ist also unter diesen Umständen in jedem Zeitmomente der Temperatur proportional, die in diesem Zeitmomente in der oberen Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle vorhanden ist. Aus den Galvanometerausschlägen  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , die in den Zeitmomenten  $t_0, t_1, t_2, \dots$  auftreten, lässt sich daher die Wärmeleitung der untersuchten Flüssigkeit nach der Formel berechnen:

$$k = \frac{q \cdot e}{q_1^2} \frac{1}{t_{n+i} - t_i} \lg \left( \frac{x_i}{x_{n+i}} \right).$$

Die Grösse  $q_1$  der rechten Seite dieser Gleichung ist die kleinste Wurzel der transzendenten Gleichung:

$$qA \operatorname{tg} qA = \frac{F A \varrho c}{M_1 c_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{h_1 F_1 \varrho c A^2}{k M_1 c_1} \frac{1}{(qA)^2}\right)},$$

deren rechte Seite durch die Ersetzung der Masse  $M_1$  durch das Product  $A_1 F \varrho_1$  in die mehr symmetrische Form gebracht werden kann:

$$qA \operatorname{tg} qA = \frac{A \varrho c}{A_1 \varrho_1 c_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{h_1 F_1 \varrho c A^2}{k F \varrho_1 c_1 A_1} \frac{1}{(qA)^2}\right)}.$$

Da das nur mit Hülfe der bekannten Wurzelwerthe  $q_n$  ermittelbare Wärmeleitungsvermögen  $k$  in diese Gleichung eingeht, ist eine exacte, ganz allgemeine Bestimmung dieser Wurzelwerthe unmöglich. Indess lässt sich sofort übersehen, dass sich diese Wurzeln  $q_n$  bei passender Gestaltung der Versuchsmethode durch ein Annäherungsverfahren mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen lassen. Da die Grösse  $h_1$  durch ein sogleich zu besprechendes Verfahren gleich 0,0057 und der Werth von  $k$  für die untersuchten Flüssigkeiten gleich 0,02 bis 0,08 gefunden wurde, da ferner die Lamellendicke  $A$  nur den kleinen Werth von 0,23 cm,  $A_1$  dagegen die beträchtliche Grösse 1,02 cm besass, und die Flächengrössen  $F$  und  $F_1$  wegen der Plattengestalt nur wenig voneinander verschieden sind, war in den ausgeführten Versuchen der Factor  $\frac{h_1 F_1 c A^2}{k F \varrho_1 c_1 A_1}$  nur eine sehr kleine Grösse; in den Versuchen über die Wärmeleitung des Wassers betrug er z. B. nur 0,0063. Der erhebliche Grössenwerth des Factors  $\frac{A \varrho c}{A_1 \varrho_1 c_1}$  lässt die kleinste Wurzel  $qA$  nie sehr klein ausfallen; für Wasser war z. B. der kleinste Wurzelwerth  $(qA)_1$  gleich 0,5. Zur Bestimmung des kleinsten Wurzelwerthes  $(qA)_1$  der obigen transzendenten Gleichung kann man also in erster, ziemlich grosser Annäherung von dem Gliede  $\frac{h_1 F_1 \varrho c A^2}{k F \varrho_1 c_1 A_1} \cdot \frac{1}{(qA)^2}$  absehen. Man berechnet die erste Wurzel der Gleichung:

$$qA \operatorname{tg} qA = \frac{A \varrho c}{A_1 \varrho_1 c_1},$$

ermittelt daraus die Grösse  $q_1^2$ , sucht mit Hülfe derselben aus den gemachten Temperaturbeobachtungen den (bis auf

einige Procente angenähert richtigen) Grössenwerth des Wärmeleitungsvermögens  $k$ , setzt diesen angenäherten Werth von  $k$  in die unverkürzte transcendentale Gleichung ein und leitet jetzt den exakteren Werth von  $q_1$  und daraus den richtigen Werth von  $k$  ab.

5. Zur genauen Berechnung des Wärmeleitungsvermögens  $k$  aus den angestellten Beobachtungen ist zunächst die Kenntniß der Grösse des äussern Wärmeleitungsvermögens  $h_1$  der obere Kupferplatte erforderlich. Diese Grösse wurde wiederholt durch besondere Versuchsreihen ermittelt. Die Kupferplatte mit dem eingelötheten Thermoelemente wurde an zwei dünnen Fäden in derselben auf  $0^\circ$  abgekühlten Hülle aufgehängt, in welcher die Wärmeleitung der Flüssigkeiten vor sich ging. Ist die Temperatur der Kupfermasse  $M_1$  in dem Momenten  $t$  gleich  $u$ , und besitzt die Kupferplatte die gesammte Oberfläche  $O$ , so besteht in dem Zeitmomenten  $t$  folgender Differentialzusammenhang zwischen  $u$  und  $t$ :

$$-M_1 c_1 du = h_1 O \cdot u \cdot dt,$$

woraus sich der folgende Integralzusammenhang ergibt:

$$\lg \left( \frac{u_0}{u} \right) = \frac{h_1 O}{M_1 c_1} \cdot t,$$

sobald mit  $u_0$  die zur Zeit  $t=0$  vorhandene Temperatur bezeichnet und gleichzeitig die (sehr angenähert richtige) Annahme getroffen wird, dass die Grösse  $h_1$  innerhalb des engen Temperaturintervales der Abkühlung constant ist. Zur Bestimmung des Temperaturquotienten  $\frac{u_0}{u}$  wurde die andere Löthstelle des Thermoelemente dauernd auf  $0^\circ$  abgekühlt und das Thermoelement dauernd in den Kreis eines aperiodisch gestellten Galvanometers eingeschaltet. Da nach der oben geführten Rechnung die Temperaturen  $u_0$  und  $u$  den in denselben Zeitmomenten stattfindenden Ausschlägen  $x_0$ ,  $x$  der Galvanometeradel proportional sind, so lässt sich an die Stelle der letzten Gleichung auch die folgende setzen:

$$\lg \left( \frac{x_0}{x} \right) = \frac{h_1 O}{M_1 c_1} \cdot t,$$

In den ausgeführten Versuchsreihen überliess man die Kupferplatte der Abkühlung von Zimmertemperatur an ca.

60—80 Minuten hindurch und notirte von zwölfter Minute zu zwölfter Minute die vorhandene Ablenkung der Galvanometernadel. Um etwa eintretende Änderungen der Ruhelage eliminiren zu können, wurde von funfzehn zu funfzehn Minuten diese Ruhelage von neuem bestimmt.

Die folgende Tabelle gibt die Resultate der ersten zur Bestimmung von  $h_1$  ausgeführten Versuchsreihe. In der ersten Spalte stehen die Zeitmomente der Ablesungen; die zweite Spalte gibt die auf Bögen reducierten Ablenkungen des Galvanometermagnets in Einheiten der benutzten Millimeterscala; die dritte Spalte enthält die den Ablenkungen entsprechenden Temperaturen der Kupferplatte; die vierte Spalte liefert die gewöhnlichen Logarithmen der Ablenkungen, und die letzte Spalte gibt die Differenzen dieser aufeinander folgenden Logarithmen.

3 <sup>h</sup> 6'	392,5 mm	23,03°	2,59984	0,08009
18'	326,4 "	19,20°	2,51375	0,07966
30'	271,7 "	15,99°	2,43409	0,07787
42'	227,1 "	13,96°	2,35622	0,07747
54'	190,0 "	11,18°	2,27875	0,07927
66'	158,3 "	9,31°	2,19948	0,07661
78'	132,7 "	7,80°	2,12287	

Hieraus ergibt sich im Mittel für die Differenz der natürlichen Logarithmen je zweier um 1 Minute auseinander liegender Temperaturen:

$$\frac{h_1 O}{M_1 c_1} = 0,01504.$$

Zwei andere, später ausgeführte Versuchsreihen ergaben für dieselbe Grösse die Mittelwerthe 0,01518 und 0,01515. Aus dem allgemeinen Mittelwerthe 0,01512 und den weiteren Daten:  $O = 456,43$  qcm.,  $M_1 = 1851,2$  g und  $c_1 = 0,0932$  resultirt für das äussere Wärmeleitungsvermögen der Kupferplatte der Werth:

$$h_1 = 0,00570,$$

welchem Werthe Gramm, Centimeter, Minute und  $1^{\circ}$  C. als Einheiten zu Grunde liegen.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

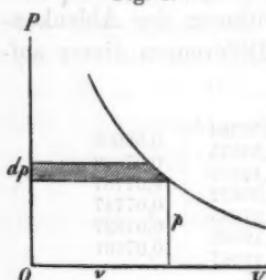
VIII. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre  
und die Constitution gasförmiger Weltkörper;  
von A. Ritter in Aachen.

Siebente Abtheilung.

§ 27. Einfluss der Condensirbarkeit der Gase auf die Höhe einer aus denselben gebildeten Atmosphäre.

Nach § 2 und § 16<sup>1)</sup>) kann man das Gesetz, nach welchem der atmosphärische Druck mit der Höhe über der Erdoberfläche sich ändert (indem man wieder  $z = H - x$  setzt) darstellen durch die Differentialgleichung:

Fig. 3.



(246)  $dp = \gamma dx$  oder  $dx = v dp$ ,  
welche in der letzteren Form zeigt,  
dass die Grösse  $dx$  mittelst des in  
Fig. 3 schraffirten Flächenstreifens  
geometrisch dargestellt werden kann.  
Die ganze Atmosphärenhöhe:

$$(247) \quad H = \int_0^{p_0} v dp = F$$

entspricht demnach der in Fig. 4  
schraffirten Fläche, deren Inhalt  $F$   
berechnet werden kann, sobald die  
Zustandslinie gegeben ist, d. h. so-  
bald das Gesetz bekannt ist, nach  
welchem der Druck  $p$  als Function  
von  $v$  mit letzterer Grösse sich  
ändert.

Für eine Atmosphäre von con-  
stanter Dichtigkeit würde man  
 $v = v_0$  zu setzen haben und die Gleichung erhalten:

$$(248) \quad H = v_0 \int_0^{p_0} dp = p_0 v_0 = R T_0,$$

welche zeigt, dass in diesem Falle die Höhe der Atmosphäre  
durch die in Fig. 5 schraffirte Rechteckfläche geome-  
trisch dargestellt werden kann. Die Isotherme, als gleich-

1) s. Wied. Ann. 5. p. 405 u. flgde. 1878.

seitige Hyperbel, bildet den geometrischen Ort für die dem Punkte  $O$  gegenüberliegenden Eckpunkte aller Rechtecke von gleichem Flächeninhalt. Folglich hat z. B. das in Fig. 5 punktierte Rechteck denselben Flächeninhalt wie das schraffierte Rechteck. Der in § 2 gefundene Satz, nach welchem die Atmosphärenhöhe nur von dem Producte  $p_0 v_0$ , d. h. von der Temperatur der untersten Schicht, abhängt, gilt daher auch für eine Atmosphäre von konstanter Dichtigkeit.

Der letzterwähnte Satz gilt überhaupt immer dann, wenn die Zustandslinie sich darstellen lässt durch eine Gleichung von der Form:

$$(249) \quad p v^k = p_0 v_0^k,$$

in welcher der Exponent  $k$  eine beliebige, zwischen den Grenzen  $+1$  und  $+\infty$  liegende constante Zahl bedeuten kann. Denn nach Substitution des hieraus für  $v$  zu entnehmenden Werthes erhält man aus Gleichung (247) für die Atmosphärenhöhe  $H = F$  den folgenden Ausdruck:

$$(250) \quad H = p_0^{\frac{1}{k}} v_0 \int_0^{p_0} p^{-\frac{1}{k}} dp, \text{ oder:}$$

$$(251) \quad H = \frac{k p_0 v_0}{k-1} = \frac{k R T_0}{k-1} = F.$$

Wenn man hierin dem Buchstaben  $k$  wieder die frühere Bedeutung  $k = \frac{c_p}{c_v}$  beilegt, so kann nach der mechanischen Wärmetheorie:

$$(252) \quad \frac{A k R}{k-1} = c_p$$

gesetzt werden. Der Werth  $k = \frac{c_p}{c_v}$  entspricht dem Falle der adiabatischen Zustandslinie, und für diesen Fall erhält man wieder die schon in § 2 gefundene Gleichung:

$$(253) \quad H = \frac{c_p T_0}{A} = F.$$

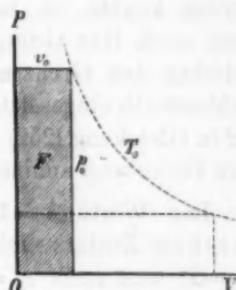


Fig. 5.

Da jedoch die in den Gleichungen (250) und (251) ange deutete Berechnung der Grösse  $H = F$  ganz unabhängig von der dem Buchstaben  $k$  beigelegten Bedeutung ausgeführt werden konnte, so behalten die obigen Gleichungen auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn für  $k$  irgend ein anderer zwischen den Grenzen  $+1$  und  $+\infty$  liegender constanter Zahlenwerth eingesetzt wird, in welchem Falle natürlich auch der in Gleichung (252) mit  $c_p$  bezeichnete Ausdruck eine andere Bedeutung annimmt.

Der Werth  $k = 1$  würde dem Falle der isothermischen Zustandslinie entsprechen; für diesen Fall wird  $H = \infty$  und auch  $c_p = \infty$ . Der Werth  $k = \infty$  entspricht dem Falle der isoplerischen Zustandslinie; für diesen Fall erhält man wie oben den Werth  $H = p_0 v_0$ , und nach Gleichung (252) wird in diesem Falle  $c_p = AR$ . Wenn man ein anderes mal  $k = 2$  und dem entsprechend  $c_p = 2AR$  setzt, so wird  $H = 2p_0 v_0 = 2RT_0$ . Da für trockene atmosphärische Luft  $R = 29,27$  zu setzen ist, so könnte man im letzteren Falle die Atmosphärenhöhe auch wieder nach der (schon in § 2 gefundenen) Gleichung (253) berechnen, indem man die Zustandslinie als eine adiabatische Curve ansieht, zugleich aber für die specifische Wärme der Luft bei constantem Drucke statt des wirklichen Werthes  $c_p = 0,2375$  den kleineren Werth:  $c_p = 2AR = 0,138$  in Rechnung bringt.

Mittelst der in Fig. 3 und Fig. 4 angedeuteten graphischen Methode würde man auch für ein beliebiges anderes Gas die Atmosphärenhöhe ermitteln können, sobald die Zustandslinie gegeben ist. Wenn die Form der Adiabate des gesättigten Wasserdampfes (insbesondere für niedrige Temperaturen) genauer bekannt wäre, so würde man die Höhe der gesättigten adiabatischen Wasserdampf atmosphäre durch Berechnung des Flächeninhaltes der von dieser Adiabate begrenzten Fläche bestimmen können; und wenn man statt der Adiabate die in Fig. 6 punktirte Grenzcurve des gesättigten Dampfes als obere Begrenzungslinie der schraffirten Fläche wähle, so würde man auf gleiche Weise die (grössere) Höhe der klaren, d. h. von Condensationsproduc-

ten befreiten, gesättigten Wasserdampfatmosphäre bestimmen können.

Da der adiabatische Zustand nicht als Gleichgewichtszustand gelten kann, insofern die Condensationsproducte vermöge ihres grössern specifischen Gewichtes unmittelbar nach ihrer Entstehung zu Boden sinken müssten, so würde dem für die Höhe der adiabatischen gesättigten Wasserdampfatmosphäre auf solche Weise gefundenen Werthe nur die Bedeutung eines untern Grenzwertes für die wirkliche Höhe der gesättigten Wasserdampfatmosphäre beizulegen sein. Der adiabatische Zustand einer verticalen Säule gesättigten Dampfes würde nur dann als Gleichgewichtszustand fortbestehen können, wenn die einzelnen Horizontalschichten der Säule durch gewichtlose, unendlich dünne Horizontalplatten getrennt wären. Mit dem Hinwegnehmen dieser Platten würde eine Störung des Gleichgewichtes eintreten. Um bei unverändert bleibender Temperatur der untersten Schicht den Gleichgewichtszustand wieder herzustellen, müsste der ganzen Masse gerade so viel Wärme zugeführt werden, als zur Verdampfung sämmtlicher Condensationsproducte erforderlich sein würde.

Der auf solche Weise herbeigeführte Gleichgewichtszustand der klaren gesättigten Dampfsäule würde jedoch nicht eigentlich als ein auf längere Dauer sich erhaltender Beharrungszustand gelten können, insofern jede Mischung der unteren mit den höher liegenden Schichten, wie sie nicht nur durch Verticalströmungen, sondern (nach der kinetischen Gastheorie) höchst wahrscheinlich auch durch die natürlichen Molecularbewegungen bedingt wird, auf Wiederherbeiführung des adiabatischen Zustandes hinwirken würde. Man darf daher annehmen, dass die sich selbst überlassene Atmosphäre gesättigten Wasserdampfes in Wirklichkeit einen zwischen jenen zwei Grenzzuständen liegenden eigenthümlichen Zwischenzustand annehmen wird, welcher sich durch ein an allen

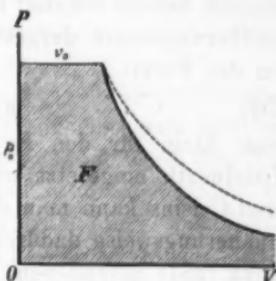


Fig. 6.

Orten gleichzeitig stattfindendes fortwährendes Entstehen und Wiederverschwinden von Condensationsproducten charakterisiert.

So weit die Form der Adiabate des gesättigten Wasserdampfes bereits bekannt ist, kann dieselbe für kurze Strecken annäherungsweise dargestellt werden durch eine Gleichung von der Form:

$$(254) \quad p v^k = \text{Const.}$$

wenn darin für den Exponenten  $k$  ein passend gewählter Mittelwerth eingesetzt wird. Für Temperaturen unter Null Grad Celsius kann man den für  $k$  einzusetzenden Mittelwerth annäherungsweise dadurch bestimmen, dass man den in Gleichung (251) gefundenen Werth von  $H$  demjenigen Werthe gleichsetzt, welcher in § 3 aus den Gesetzen der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet wurde. Man erhält dann die Gleichung:

$$(255) \quad \frac{k p_0 v_0}{k - 1} = \frac{L_0 + \zeta T_0}{A}.$$

Für  $T_0 = 273$  ist  $p_0 = 62,5$  und  $v_0 = 205,3$  zu setzen (entsprechend dem Werthe der Constanten  $R = \frac{p_0 v_0}{T_0} = 47$ ). Die Verdampfungswärme des Eises hat bei dieser Temperatur die Grösse  $L_0 = 606,5 + 80$ . Wenn also für die Grösse  $\zeta$ , als mittlere specifische Wärme des Eises zwischen den Temperaturgrenzen  $T = 0$  und  $T = 273$  der Annäherungswert  $\zeta = 0,5$  gesetzt wird, so ergibt sich aus obiger Gleichung der Werth  $k = 1,038$ . Diesem Werthe von  $k$  würde nach Gleichung (252) der Werth  $c_p = 3,015$  entsprechen. So weit es sich lediglich um die Ermittelung eines unteren Grenzwertes für die Atmosphärenhöhe bei niedrigen Temperaturen handelt, kann man sich hiernach das Verhalten des gesättigten Wasserdampfes annäherungsweise veranschaulichen, indem man sich denselben durch ein ideales Gas ersetzt denkt, von solcher Beschaffenheit, dass für die Constanten desselben die Werthe:

$$R = 47, \quad k = 1,038, \quad c_p = 3,015$$

anzunehmen sein würden. Wenn zwar den numerischen Ergebnissen einer solchen Betrachtungsweise nur die Bedeu-

tung von vorläufigen Annäherungswerten beizulegen sein wird, so berechtigt die obige Untersuchung doch jedenfalls zu dem Schlusse, dass die Eigenschaft der Condensirbarkeit eines Gases hinsichtlich der Höhe einer aus demselben bestehenden Atmosphäre einen ähnlichen Einfluss hat, wie bei einem idealen Gase eine sehr beträchtliche Vergrösserung seiner specifischen Wärme.

Nach Regnault's Beobachtungen ist für gasförmigen Wasserdampf die Grösse  $c_p < 0,5$ . Die Eigenschaft der Condensirbarkeit hat also bei dem Wasserdampfe unter den oben vorausgesetzten Umständen denselben Einfluss, welchen bei einem idealen Gase eine Vergrösserung der specifischen Wärme auf mehr als das Sechsfache haben würde. Man darf annehmen, dass bei den sogenannten permanenten Gasen die erst vor kurzem experimentell nachgewiesene Eigenschaft der Condensirbarkeit in ähnlicher Weise ihren Einfluss geltend machen wird, und dass die wirkliche Höhe einer aus solchen Gasen bestehenden Atmosphäre stets beträchtlich grösser sich ergeben wird als die aus der Voraussetzung des idealen Gaszustandes berechnete Höhe. Diese Annahme stützt sich auf die Erfahrung, insofern die wirkliche Höhe der Erdatmosphäre erfahrungsmässig beträchtlich grösser ist als diejenige Höhe, welche in § 2 und § 4 aus der Voraussetzung des idealen Gaszustandes der Gase Sauerstoff und Stickstoff berechnet wurde.

#### § 28. Grenzbedingungen für die Möglichkeit des Vorhandenseins einer Atmosphäre.

Die im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen können zur Berechnung der Höhe, welche die Erdatmosphäre unter gewissen gegebenen Umständen annehmen würde, benutzt werden, so lange als die Atmosphärenhöhe  $H$  im Verhältniss zum Erdhalbmesser  $r$  sehr klein vorausgesetzt werden darf. Bei grösserer Atmosphärenhöhe würde auf die Veränderlichkeit der mit wachsendem Abstande vom Erdmittelpunkte abnehmenden Intensität der Schwerkraft Rücksicht genommen werden müssen, und für diesen Fall würde man der Gleichung (246) die folgende Form zu geben haben:

$$(256) \quad dp = -\gamma \frac{r^2}{\varrho^2} d\varrho.$$

Hierin bedeutet  $p$  den atmosphärischen Druck im Abstande  $\varrho$  vom Erdmittelpunkte, und  $\gamma$  das Gewicht, welches die Masse eines an jener Stelle der Atmosphäre befindlichen Cubikmeters Luft an der Erdoberfläche besitzen würde. Man kann daher wieder  $\gamma v = 1$  setzen, und wenn man ausserdem mit Benutzung der in den Figuren des vorigen Paragraphen angewendeten Bezeichnungsweise  $v dp = -dF$  setzt, so erhält man die Gleichungen:

$$(257) \quad dF = r^2 \frac{d\varrho}{\varrho^2},$$

$$(258) \quad F = r^2 \int_{r}^{r+H} \frac{d\varrho}{\varrho^2},$$

$$(259) \quad F = r^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+H} \right).$$

aus welcher letzteren für die Atmosphärenhöhe der folgende Werth sich ergibt:

$$(260) \quad H = \frac{F}{1 - \frac{F}{r}}.$$

Diese Gleichung gilt für die isolirt im Raume schwebend gedachte Erdkugel unter der Voraussetzung, dass dieselbe keine Drehbewegung besitzt. Ausserdem ist die Gültigkeit der Gleichung an die Bedingung geknüpft, dass die Masse der Atmosphäre sehr klein ist im Verhältniss zur Erdmasse, weil nur in diesem Falle die von der Atmosphäre selbst ausgeübte Gravitationswirkung gegen die von der Erdmasse ausgeübte Gravitationswirkung vernachlässigt werden darf. Im übrigen gilt die obige Gleichung für jede beliebige gegebene Zustandslinie der Atmosphäre und zeigt, dass die Höhe derselben unendlich gross wird, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(261) \quad F = r.$$

Für den speciellen Fall der adiabatischen Zustandslinie hat man hierin für  $F$  den in Gleichung (253) gefundenen Ausdruck zu substituiren, und für diesen Fall erhält man die Bedingungsgleichung:

$$(262) \quad c_p T_0 = Ar.$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck repräsentirt das Wärmeäquivalent der mechanischen Arbeit, welche erforderlich sein würde, um 1 kg Luft von der Erdoberfläche bis zu unendlich grosser Höhe emporzuheben, und der linksseitige Ausdruck repräsentirt die Wärmequantität, welche diesem Luftkilogramm zugeführt führt werden müsste, um dasselbe bei constantem Drucke von der absoluten Temperatur Null bis zur Temperatur der untersten Schicht zu erwärmen. Die obige Gleichung hätte daher auch direct aus dem am Schlusse des § 1 aufgestellten Satze abgeleitet werden können.

Denkt man sich die Temperatur der Erdoberfläche allmählich zunehmend und infolge dessen die Höhe der (aus einem idealen Gase bestehend vorausgesetzten) Atmosphäre allmählich grösser werdend, so erkennt man, dass in dem Augenblicke, wo die Oberflächentemperatur den Werth:

$$(263) \quad T_0 = \frac{A_r}{c_p}$$

erreicht und überschreitet, die Möglichkeit der Existenz einer im Gleichgewichtszustande befindlichen Atmosphäre ganz aufhören würde, insofern alsdann bei jeder, wenn auch noch so grossen, endlichen Höhe der Atmosphäre die Expansionsbewegung derselben immer noch weiter sich fortsetzen würde. Für Wasserstoff würde  $c_p = 3,409$  zu setzen sein. Die Grenze der Oberflächentemperatur für die Möglichkeit der Existenz einer Wasserstoffatmosphäre entspricht daher dem Werthe:

$$(264) \quad T_0 = \frac{6\,366\,198}{3,409 \cdot 424} = 4404,4.$$

Um für einen beliebigen andern kugelförmigen Weltkörper, an dessen Oberfläche die Gravitationsbeschleunigung gleich  $Ng$  ist, und dessen Halbmesser  $\lambda$  mal so gross ist als der Erdhalbmesser, die Atmosphärenhöhe zu berechnen, würde man resp. die Werthe  $N\gamma$  statt  $\gamma$ , und  $\lambda r$  statt  $\lambda$ , einzusetzen haben in Gleichung (256), welche alsdann die folgende Form annimmt:

$$(265) \quad dp = - N\gamma \lambda^2 r^2 \frac{d\varrho}{\varrho^2}.$$

Wenn man hiernach die Rechnung auf dieselbe Weise wie

oben fortsetzt, so erhält man für die Höhe der Atmosphäre die Gleichung:

$$(266) \quad H = \frac{F}{N - \frac{F}{\lambda r}},$$

und für diejenige Oberflächentemperatur, bei welcher die Atmosphäre eine unendlich grosse Höhe annehmen würde, erhält man den Werth:

$$(267) \quad T_0 = \frac{AN\lambda r}{c_p}.$$

Die auf solche Weise zu berechnende Grenztemperatur kann man die „Dispersionstemperatur“ des betreffenden Weltkörpers nennen, insofern beim Ueberschreiten dieser Temperaturgrenze die Gravitationskraft des Weltkörpers nicht mehr ausreichen würde die Atmosphäre an denselben zu fesseln und eine „Zerstreuung“ derselben im unendlichen Raume zu verhindern. Wenn für eine bestimmte Gasart die Dispersionstemperatur der Erde bereits bekannt ist, so kann man, wie obige Gleichung zeigt, für dieselbe Gasart die Dispersionstemperatur eines beliebigen andern Weltkörpers berechnen, indem man den für die Erde gefundenen Werth mit dem Producte  $N\lambda$  multiplicirt. Hiernach würde man z. B. für eine reine Wasserstoffatmosphäre die in der nachfolgenden Tabelle<sup>1)</sup> angegebenen Zahlenwerthe erhalten:

Weltkörper	$N$	$\lambda$	$T_0$
Erde . . . .	1	1	4404,4
Mars . . . .	0,382	0,540	908,5
Merkur . . .	0,521	0,378	867,4
Mond . . . .	0,164	0,273	197,2

Bei der Berechnung dieser Zahlenwerthe wurde der Wasserstoff als ein ideales Gas behandelt. Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass die Eigenschaft der Condensirbarkeit eines Gases stets eine Atmosphärenhöhe bedingt, welche beträchtlich grösser ist als diejenige, welche dem idealen Gaszustande entsprechen würde. Die oben für die

1) Der obigen Tabelle wurden die im „Annuaire du Bureau des Longitudes“ vom Jahre 1879 angegebenen Zahlenwerthe zu Grunde gelegt.

Temperatur  $T_0$  gefundenen Werthe sind daher jedenfalls beträchtlich grösser als die wirklichen Dispersionstemperaturen. Hieraus folgt: dass auf einem Weltkörper von der Grösse und Masse des Mondes die Existenz einer reinen Wasserstoffatmosphäre auf die Dauer nur dann möglich sein würde, wenn die Oberflächentemperatur desselben beträchtlich niedriger wäre als „minus 75,8 Grad Celsius“.

Auf dem Monde selbst würde (infolge des störenden Einflusses der Drehbewegung des Mondes und der Anziehungs-kraft der Erde) die Dispersion der Atmosphäre schon beginnen bei einer Oberflächentemperatur, welche für den isolirt im Raume ruhenden Mond eine Atmosphärenhöhe von ungefähr 21 Mondhalbmessern bedingen würde. Aus der Gleichung (266) erhält man für diese Temperatur, indem man

$$H = 21 \lambda r \text{ und } F = \frac{c_p T_0}{A} \text{ setzt, den Werth:}$$

$$(268) \quad T_0 = \frac{31}{22} \cdot \frac{AN \lambda r}{c_p} = \frac{31}{22} \cdot 197,2 = 188,2.$$

Hieraus folgt, dass auf dem Monde selbst die Existenz einer reinen Wasserstoffatmosphäre auf die Dauer nur dann möglich sein würde, wenn die Oberflächentemperatur desselben beträchtlich niedriger wäre als „minus 84,8 Grad Celsius.“

### §. 29. Dispersionstemperatur einer kosmischen Eiskugel.

Die Gültigkeit der im vorigen Paragraphen für die Dispersionstemperaturen gefundenen Gleichungen ist an die Bedingung geknüpft: dass die Masse der Atmosphäre sehr klein ist im Verhältniss zur Masse des Weltkörpers selbst. Bei Voraussetzung des idealen Gaszustandes konnte diese Bedingung stets als erfüllbar angesehen werden, insofern für die Masse der idealen Gasatmosphäre ein von der Oberflächentemperatur unabhängiger, constanter, beliebig klein zu wählender Werth als gegeben angenommen werden durfte. Wenn dagegen die Atmosphäre des Weltkörpers aus gesättigtem Wasserdampfe bestände, so würde das Erfülltsein der obigen Bedingung in jedem concreten Falle eines besonderen Nachweises bedürfen, insofern bei stets gesättigt bleibendem Wasserdampfe mit zunehmender Temperatur der untersten

Schicht zugleich die Dichtigkeit derselben, und infolge dessen auch die Masse der ganzen Atmosphäre zunehmen würde.

In § 27 wurde gezeigt, dass die Zustandslinie der gesättigten Wasserdampfatmosphäre bei Temperaturen unter Null Grad Celsius annäherungswise sich darstellen lässt durch die Gleichung:

$$(269) \quad p v^k = p_0 v_0^k, \text{ oder } \frac{p}{v^k} = \frac{p_0}{v_0^k},$$

in welcher der Exponent  $k = 1,038$  zu setzen ist. Wenn man den hieraus für die Grösse  $v$  zu entnehmenden Werth in Gleichung (265) substituirt und alsdann die Integration derselben ausführt, so erhält man die Gleichungen:

$$(270) \quad \frac{p_0}{v_0^k} \int_p^{p_0} p^{-\frac{1}{k}} dp = -N\lambda^2 r^2 \int_{\varrho}^{\lambda r} \frac{d\varrho}{\varrho^{\frac{1}{k}}},$$

$$(271) \quad \frac{kp_0^{\frac{1}{k}}}{(k-1)v_0} \left( p_0^{1-\frac{1}{k}} - p^{1-\frac{1}{k}} \right) = N\lambda r \left( 1 - \frac{\lambda r}{\varrho} \right).$$

Da an der äusseren Grenzfläche der Atmosphäre der Druck gleich Null ist, so entspricht dem Werthe  $\varrho = \lambda r + H$  der Werth  $p = 0$ ; folglich ist:

$$(272) \quad \frac{kp_0^{\frac{1}{k}}}{(k-1)v_0} \left( p_0^{1-\frac{1}{k}} - 0 \right) = N\lambda r \left( 1 - \frac{\lambda r}{\lambda r + H} \right),$$

und wenn man die vorhergehende Gleichung durch die letztere dividirt, so erhält man eine Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$(273) \quad \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{\frac{\lambda r}{\varrho} - \frac{\lambda r}{\lambda r + H}}{1 - \frac{\lambda r}{\lambda r + H}}.$$

Für eine Atmosphäre von unendlich grosser Höhe ist  $\frac{\lambda r}{\lambda r + H} = 0$  zu setzen, und für diesen Fall wird:

$$(274) \quad \frac{p}{p_0} = \left( \frac{\lambda r}{\varrho} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Wenn mit  $P$  das Gewicht bezeichnet wird, welches die Masse der ganzen Wasserdampfatmosphäre, gewogen an der Erdoberfläche, besitzen würde, so ist:

(275)

(276)

zu set

Höhe

gefunden

her k

(277)

(278)

(279)

Das i

sich d

D

liche

isolin

körper

Grad

den 7,

Kuge

wenn

die D

Welt

D

Tempe

Theil

so wi

Eiskug

von d

dass d

Dichti

gesätti

$$(275) \quad dP = 4\pi\gamma\varrho^2 d\varrho, \quad \text{oder:}$$

$$(276) \quad dP = 4\pi\gamma_0\varrho^2 d\varrho \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}$$

zu setzen, und für eine Atmosphäre von unendlich grosser Höhe erhält man hieraus mit Benutzung des oben für  $\frac{p}{p_0}$  gefundenen Werthes, indem man zugleich  $\frac{\varrho}{\lambda r} = x$  und nachher  $k = 1,038$  setzt, die folgenden Gleichungen:

$$(277) \quad dP = 4\pi\gamma_0\lambda^3 r^3 x^2 dx \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

$$(278) \quad P = 4\pi\gamma_0\lambda^3 r^3 \int_1^{\frac{p}{p_0}} x^{\frac{2k-3}{k-1}} dx,$$

$$(279) \quad \frac{P}{\frac{4}{3}\pi\lambda^3 r^3 \gamma_0} = \frac{1}{7,77}.$$

Das in dieser letztern Gleichung gefundene Resultat lässt sich durch den folgenden Satz ausdrücken:

Die Masse der im Gleichgewichtszustande befindlichen gesättigten Wasserdampfatmosphäre eines isolirt im Raume ruhenden kugelförmigen Weltkörpers, dessen Oberflächentemperatur unter Null Grad Celsius liegt, kann niemals mehr betragen als den 7,77-ten Theil von derjenigen Masse, welche eine Kugel vom Radius des Weltkörpers besitzen würde, wenn die Dichtigkeit derselben so gross wäre wie die Dichtigkeit des Dampfes an der Oberfläche des Weltkörpers.

Da die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes bei der Temperatur von Null Grad Celsius ungefähr den 200,000-ten Theil von der Dichtigkeit des gewöhnlichen Eises beträgt, so wird die Masse der Dampfatmosphäre einer kosmischen Eiskugel demnach niemals mehr als den 1400 000-ten Theil von der Masse der Eiskugel betragen können. Hieraus folgt, dass die Gleichung (267) bei Weltkörpern, deren mittlere Dichtigkeit nicht kleiner ist als die des Eises, auch für die gesättigte Wasserdampfatmosphäre als gültig betrachtet wer-

den darf, solange jene Gleichung zu Werthen von  $T_0$  führt, welche kleiner als 273 sind.

Nach § 27 kann man bei der Berechnung der Atmosphärenhöhe für gesättigten Wasserdampf unter obiger Voraussetzung annäherungsweise  $c_p = 3,015$  setzen. Hiernach erhält man mit Benutzung der im vorigen Paragraphen angegebenen Zahlenwerthe für einen Weltkörper von der Grösse und Masse des Mondes aus Gleichung (267) den Werth:

$$(280) \quad T_0 = 223 \text{ Grad.}$$

Auf einem isolirt im Weltenraume ruhenden Weltkörper von der Grösse und Masse des Mondes würde daher die Existenz einer reinen gesättigten Wasserdampfatmosphäre auf die Dauer nur dann möglich sein, wenn die Oberflächentemperatur niedriger wäre als „minus 50 Grad Celsius“.

Eine Eiskugel von der Grösse des Mondes würde zwar unter Einwirkung ihrer eigenen Gravitationskraft in ihrem centralen Theile eine Dichtigkeit annehmen, welche höchst wahrscheinlich beträchtlich grösser ist als die Dichtigkeit des (an der Erdoberfläche unter atmosphärischem Drucke befindlichen) gewöhnlichen Eises. Da jedoch die mittlere Dichtigkeit des Mondes fast viermal so gross ist als die des gewöhnlichen Eises, so ist wohl nicht als wahrscheinlich anzunehmen, dass eine solche Eiskugel eine mittlere Dichtigkeit besitzen würde, welche die des Mondes erreicht. Aber selbst wenn man dies annehmen wollte, so würde man behaupten dürfen: dass eine Eiskugel von der Grösse des Mondes im Laufe der Zeit allmählich vollständig als Dampf im unendlichen Raume sich zerstreuen müsste, wenn durch Wärmezustrahlung an ihrer festen Oberfläche eine constante Temperatur unterhalten würde, welche höher ist als „minus 50 Grad Celsius“. Wenn eine solche Eiskugel als Komet in das Sonnensystem eintrate, so würde die Schweifbildung beginnen ungefähr zu der Zeit, wo die Oberflächentemperatur infolge der Annäherung an die Sonne jenen Grenzwerth überschreitet.

Für den wirklichen Mond würde man, mit Berücksichtigung des Einflusses seiner Drehbewegung und der An-

ziehungskraft der Erde, nach Gleichung 268) den noch kleineren Grenzwerth erhalten:

$$281) \quad T_0 = \frac{21}{22} \cdot 223 = 213 \text{ Grad.}$$

Hieraus folgt, dass der Mond selbst — wenn derselbe eine Eiskugel wäre — schon bei einer constanten Oberflächen-temperatur von „minus 60 Grad Celsius“ allmählich in einen die Erde umkreisenden Dampfring sich verwandeln müsste.

Wenn das vorliegende Beobachtungsmaterial gestattete, auch für andere Substanzen die Dispersionstemperaturen zu berechnen, so könnten diese Rechnungen möglicher Weise zu dem Resultate führen: dass das Suchen nach intramercuriellen Planeten vielleicht aus dem Grunde bisher als vergeblich sich erwiesen hat, weil bei sehr kleinem Abstande von der Sonne überhaupt kein Planet existiren kann, insofern jeder Planet als solcher verschwinden müsste, wenn seine Oberflächentemperatur grösser wäre als seine Dispersionstemperatur.

## IX. Ueber ultraviolette Strahlen; von J. L. Schönn.

(Fortsetzung.)<sup>1)</sup>

Beim Natrium und den beiden folgenden Metallen wandte ich ein Kalkspathprisma mit brechender Kante von  $60^\circ$  an zum Zwecke genauerer Messungen. — Der zwischen Natrium electroden überspringende Funke liefert ein sehr einfaches ultraviolettes Spectrum. Dasselbe besteht aus einer intensiven Linie, die man bei Tage im mässig verdunkelten Zimmer deutlich wahrzunehmen vermag. Der Brechungswinkel, d. h. der Winkel zwischen dem aus dem Prisma austretenden Strahl und dem Lothe beträgt für Kalkspath  $58^\circ 30' 35''$ . Der zugehörige Brechungsexponent ist 1,705 46, und wenn man Mascart's Wellenlängen zu Grunde legt, so würde demselben die Wellenlänge 0,000 330 16 entsprechen. Diese Linie würde zwischen den Fraunhofer'schen Linien *P* und *Q*, näher an *Q* zu suchen sein.

1) s. Wied. Ann. 9. p. 483. 1880.

Diese breite Linie vermochte ich nicht durch Hinzufügung eines rechtwinkligen Bergkristallprismas zu zerlegen. Ob zwei andere sehr schwache ultraviolette Linien dem Natrium angehören, vermag ich nicht zu sagen. Im Folgenden gebe ich auch für diese die Brechungswinkel. Die rothe Lithiumlinie und die gelbe Natriumlinie führe ich mit ihren Brechungswinkeln und Brechungsexponenten an, um so gleichzeitig eine Scala herzustellen:

Brechungsexponenten  
für Kalkspath

rothe Li-Linie . . . . . =  $55^{\circ} 46' 45''$  = 1,65375  
gelbe Na-Linie  $D$  . . . . . =  $56^{\circ} 1' 15''$  = 1,65848

[Mascart = 1,65846]

feine schwache Linie. ?Na =  $58^{\circ} 10' 50''$

feine schwache Linie. ?Na =  $58^{\circ} 25' 20''$

unzweifelhafte Na-Linie =  $58^{\circ} 30' 35''$  = 1,70546

Wellenlänge = 0,000 330 16

Strontiummetall, aus Amalgam dargestellt, gibt ein sehr intensives ultraviolettes Spectrum, dessen Linien sich leicht messen lassen. Die ersten vier scharfen Linien fallen noch in das Bereich des ultravioletten Sonnenspectrums.

Im Folgenden gebe ich die Winkel und Brechungsexponenten zuerst für Kalkspath, dann die Winkel für ein rechtwinkliges Bergkristallprisma. Durch gleiche Ziffern, die vor den Winkeln stehen, werden gleiche Linien bezeichnet. In der Kalkspathreihe, die übrigens wegen der grösseren Dispersion genauer ist, sind einige schwächere Linien und Gruppen weggelassen, während die Linie 13) durch das Kalkspathprisma in zwei Linien aufgelöst wird. Die fünfte Decimale der Brechungsexponenten kann nicht als sicher betrachtet werden, da die Ablesungen höchstens auf 10 Sekunden genau sind.

Brechungsexponenten  
für Kalkspath

rothe Li-Linie =  $55^{\circ} 46' 45''$  = 1,65375

gelbe Na-Linie  $D$  =  $56^{\circ} 1' 15''$  = 1,65848

ultraviolettes  
Strontium-  
spectrum

$\left. \begin{array}{ll} 1) = 57^{\circ} 45' 30'' & = 1,691\,61 \\ 2) = 58^{\circ} 7' & = 1,698\,25 \\ 3) = 58^{\circ} 18' 45'' & = 1,701\,85 \\ 4) = 58^{\circ} 58' 15'' & = 1,713\,81 \\ 5) \text{ nicht gemessen} & \end{array} \right.$

ultraviolettes  
 Strontiumspectrum

- 6) =  $59^{\circ} 35'$  = 1,723 28
- 7) =  $60^{\circ} 4' 45''$  = 1,733 43
- 8) =  $61^{\circ} 8' 45''$  = 1,751 70
- 9) =  $61^{\circ} 59' 45''$  = 1,765 83
- 10) nicht gemessen
- 11) nicht gemessen
- 12) nicht gemessen
- 13α) =  $65^{\circ} 6' 15''$  = 1,814 15 viel stärker als β
- 13β) =  $65^{\circ} 13' 45''$  = 1,815 98
- 14) =  $65^{\circ} 41' 15''$  = 1,822 63

## Für Bergkristall.

gelbe Na-Linie  $D = 50^{\circ} 33'$ 

- 1) =  $51^{\circ} 21'$  scharfe deutliche Linie
- 2) =  $51^{\circ} 30'$  " " "
- 3) =  $51^{\circ} 35'$  " " "
- 4) =  $51^{\circ} 53'$  " " "
- 5) =  $52^{\circ} 1'$  schwache Linie
- 6) =  $52^{\circ} 6'$  weniger deutliche Linie
- 7) =  $52^{\circ} 17'$  deutlicher als die beiden vorhergehenden
- 8) =  $52^{\circ} 42'$  schwächere Linie
- 9) =  $53^{\circ} 1'$  helle leuchtende Linie
- 10) =  $53^{\circ} 11'$  schwächere Gruppe von Linien
- 11) =  $53^{\circ} 26'$  " " "
- 12) =  $53^{\circ} 45'$  etwas stärkere Gruppe v. Linien
- 13) =  $54^{\circ} 3'$  starke Linie; bei Kalkspath doppelt
- 14) =  $54^{\circ} 14' 30''$  hell leuchtende Linie.

Das ultraviolette Lithiumspectrum ist schwer zu sehen und zu messen. Die Winkel für Kalkspath sind folgende:

- 1) =  $58^{\circ} 11' 15''$
- 2) =  $58^{\circ} 25' 30''$
- 3) =  $58^{\circ} 41' 15''$
- 4) =  $58^{\circ} 51' 30''$
- 5) =  $58^{\circ} 55' 30''$
- 6) =  $60^{\circ} 19'$

Schliesslich gebe ich noch das Spectrum der Gaskohle. Die mit 1) 2) 3) 6) bezeichneten Linien gehören höchst wahrscheinlich dem Stickstoff an. Die ersten drei haben einen

übereinstimmenden und von den anderen Linien ganz abweichenden Charakter. An eine scharfe Linie schliesst sich nämlich ein Lichtband nach der ultravioletten Seite hin an. Die Linie 6) ist breit und sehr verwaschen.

gelbe Na-Linie  $D = 50^\circ 33'$

- 1) =  $51^\circ 23'$ , ein Band, das mit einer intensiven Linie beginnt, wahrscheinlich  $N$ .
- 2) =  $51^\circ 32'$  desgl. wahrscheinlich  $N$ .
- 3) =  $51^\circ 46'$  desgl. wahrscheinlich  $N$ .
- 4) =  $52^\circ 23'$  helle feine Linie
- 5) =  $52^\circ 29'$  helle starke Linie
- 6) =  $52^\circ 50'$  sehr verwaschene Linie.  $N$ ?
- 7) =  $53^\circ 7'$  scharfe feine Linie
- 8) =  $53^\circ 14'$  etwas starke breitere Linie
- 9) =  $53^\circ 55'$  scharfe Linie.

Die Absorption der ultravioletten Strahlen habe ich für folgende Substanzen untersucht: Glimmer, Gyps, Glas, Steinsalz, Alaun, Kandiszucker, Magdalaroth; (abgesehen von Wasser und Eis, deren Absorption schon im ersten Aufsatze erörtert wurde). — Einen interessanten Anblick gewährte Folgendes. Ein so feines Glimmerblättchen, als ich nur immer durch Abspalten erhalten konnte, wurde so vor den Spalt geklebt, dass dessen eine Hälfte von demselben bedeckt war. Dann sah man auf der einen Seite, die dem unbedeckten Theile des Spaltes entsprach, das ultraviolette Cadmiumspectrum vollständig. Dagegen setzten sich nur die beiden ersten starken ultravioletten Cadmiumlinien auf der andern Seite fort; die dritte und vierte starke Cadmiumlinie erschien auf der Glimmerseite nur äusserst schwach. Von da ab war die Glimmerseite des Spectrums vollständig schwarz. Ein grosser Theil des ultravioletten Spectrums wird also durch das feinste Glimmerblatt absorbirt.

Wenn man dies Verhalten des Glimmers mit der vollständigen Durchsichtigkeit des oben erwähnten 21 cm dicken Eisblocks, der alle Strahlen ohne bemerkbare Schwächung

durchlässt, vergleicht, so ermisst man die enorme Verschiedenheit der durchsichtigen farblosen Medien in optischer Hinsicht. Wie viel unbedeutender kann dagegen die optische Differenz zweier Substanzen sein, die z. B. im durchfallenden Lichte roth und blau aussehen. Wenn einst eine grosse Zahl farbloser Substanzen in dieser Hinsicht untersucht sein wird, dann werden sich gewiss Beziehungen zwischen Absorption und molecularer Structur ergeben. —

Ganz durchsichtige Gypsblättchen, wie dieselben als Gypsblättchen I., II., III., IV. Ordnung für Polarisationszwecke angewandt werden, lieferten ganz ähnliche Resultate wie Glimmerblättchen.

Die feinsten Deckgläser, wie sie Hartnack zu seinen Mikroskopen liefert, zeigten ebenfalls starke Absorption. Von dem ultravioletten Cadmiumspectrum waren die beiden ersten starken Linien von 110 der Miller'schen Scala zu sehen; dagegen die dritte starke von 130 nicht mehr. Von dem ultravioletten Magnesiumspectrum war die sehr starke Linie bei 125 zu sehen. Vom ultravioletten Calciumspectrum war die erste Doppellinie zu sehen, dagegen nichts von der zweiten Doppellinie, und da diese etwa bei 125 liegt, so sieht man auch hieraus, dass die zweite ultraviolette Calcium-Doppellinie schwächer ist als die genannte Magnesiumlinie. Vom ultravioletten Zinkspectrum sieht man nur die beiden ersten stärkeren Linien, sonst nichts. Da demnach schon durch die feinsten Glasplatten ein grosser Theil des ultravioletten Spectrums absorbirt wird, so müsste man für die Geissler'schen Röhren zum Theil wenigstens Bergkristall oder Kalkspath anwenden, wenn man die brechbareren ultravioletten Strahlen erhalten will.

Eine Steinsalzplatte von 3,5 mm Dicke liess alle Cadmiumlinien durch; das Licht der letzten war allerdings etwas geschwächt; das Steinsalz war nicht ganz klar. Da Steinsalz bekanntlich auch für ultrarote Strahlen durchlässig ist, so ergibt sich für dasselbe eine ungemein grosse Permeabilität für Strahlen jeder Art.

Auch Alaun lässt ultraviolette Strahlen gut durch. Eine Alaunplatte von 9 mm Dicke lässt noch die Cadmiumlinie

bei 155 durch. Eine Platte von 5 mm lässt die letzte Cadmiumlinie vor 170 nur sehr geschwächt sehen, und bei Anwendung einer Platte von 4 mm wurde diese letzte Linie vor 170 nicht viel deutlicher. Es scheint von dieser Stelle des Spectrums ab stärkere Absorption einzutreten. Die Alaunplatten waren allerdings nicht sehr klar.

Eine sehr dünne Platte Kandiszucker schwächte zwar schon vom Violett ab das Licht, allein äusserst schwach waren selbst noch die letzten Cadmiumlinien zu sehen. Der Kandiszucker war nicht recht klar.

Eine Magdalarothlösung von etwa 2 mm Dicke absorbierte alle ultravioletten Cadmiumlinien.

Durch eine Kerzenflamme hindurch gehen die ultravioletten Strahlen ohne bemerkbare Schwächung.

Zum Schluss möchte ich noch gelegentlich einen kleinen Versuch in Betreff der Verbreiterung der Wasserstofflinien *C* und *F* mittheilen. — Wenn man nach Einschaltung einer Leydener Flasche den Funken zwischen Platin- oder Kohlenspitzen überspringen lässt, während man in einem unmittelbar darunter befindlichen Gefässe Wasser verdampft, so erhält der Funke eine rosafarbene Umsäumung. Im Spectrum erscheint dann die rothe Wasserstofflinie breiter als bei der Geissler'schen Röhre. Viel mehr verbreitert sieht man noch die grünblaue Wasserstofflinie *F*, wohl fünfmal so breit als bei Anwendung einer Geissler'schen Wasserstoffröhre unter Beibehaltung derselben Spaltbreite. Es kann ja kaum einem Zweifel unterliegen, dass diese Verbreiterung durch die grössere Dichtigkeit des Wasserstoffgases bedingt wird, etwa wie der untere dichtere Theil der Sonnenprotuberanzen die beiden Linien verbreitert zeigt, die Linie *C* auch in geringerem Grade als die Linie *F*). Andere Wasserstofflinien habe ich nicht bemerkt. — Dasselbe Resultat erhält man, wenn man den Funken zwischen Platinelectroden durch eine Alkoholflamme überspringen lässt.

1) Vgl. Secchi, die Sonne. p. 472.

X.

In  
sorption  
für Con  
habe i  
tionshy  
nach e  
lung d  
Luft i  
andern  
O  
samme  
bei Te  
gewährt  
leichte  
ziehen  
beding  
compli  
ich ei  
D  
ter G

1)  
2)

Aufsat

und s  
gleich  
rohre z  
Glaspl  
ten wi  
dass e  
Pipette  
gleich  
der P  
der F

**X. Ueber ein neues einfaches Condensations-hygrometer; von A. Matern.**

In der Beschreibung meines Condensations- und Absorptionshygrometers<sup>1)</sup> erwähnte ich, dass ich dasselbe nur für Condensation geprüft habe. Durch vielfache Versuche habe ich seitdem gefunden, dass der Apparat als Absorptionshygrometer gleich vortheilhaft zu brauchen ist. Hier nach ergibt sich auch seine Anwendbarkeit für die Ermittlung der Spannung des gesättigten Wasserdampfes, wenn die Luft in dem einen Gefäss mit Wasserdampf gesättigt, im andern durch Schwefelsäure ausgetrocknet wird.<sup>2)</sup>

Obgleich nun dieser Apparat durch die Art seiner Zusammensetzung so verschiedenen Zwecken dienen kann und bei Temperaturgleichheit beider Gefässen grosse Genauigkeit gewährt, so wird doch für den regelmässigen Gebrauch eine leichter und schneller zu handhabende Construction vorzuziehen sein, welche eben nur bei günstigen Beobachtungsbedingungen, wie sie sich nicht immer herstellen lassen, dem complicirteren Apparate nachsteht. Für solche Zwecke möchte ich ein Hygrometer in folgender Form vorschlagen.

Den Hauptbestandtheil bildet ein eigenthümlich geformter Glasboden (Taf. I Fig. 12), welcher unten in einen  $1\frac{1}{2}$  cm

1) Matern, Wied. Ann. 9. p. 157. 1880.

2) Die hierfür gültige Formel lautet mit den Bezeichnungen jenes Aufsatzes:

$$E = h \cdot \left\{ \frac{s}{\sigma} + (b - e) \cdot \varphi \cdot \frac{V + V'}{VV} \cdot \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} \right\}$$

und setzt voraus, dass  $e$  annähernd bekannt ist. Um beide Gefässen gleichzeitig zu schliessen, sind die Pipetten mit einem weitem Ausflussrohr zu versehen, welches in einen abgeflachten und mit einem getalgten Glasplättchen verschliessbaren Rand ausläuft. In jede der beiden Pipetten wird nach ihrer Füllung ein Glasstäbchen von solcher Länge gestellt, dass es, auf dem Bodenplättchen stehend, nach der Befestigung der Pipette im Deckelrohre noch ein wenig aus letzterem hervorragt. Beim gleichzeitigen Aufdrücken der Glasplättchen auf die Rohrmündungen wird der Pipettenverschluss durch die Stäbchen abgestossen, und die Wirkung der Flüssigkeiten beginnt erst nach dem völligen Schluss des Apparates.

langen, 1 cm weiten, inwendig matt gedrehten Hals endet, der zur Aufnahme eines Kautschukcylinders bestimmt ist. Vom oberen Ende des Halses an erweitert sich der Boden in einen 3 cm weiten und 3 cm hohen cylindrischen Raum, der zur Füllung mit Wasser dient. Die Wand dieses Behälters geht in einen möglichst geebneten, horizontal abstehenden Rand von 1 cm Breite über, erhöht sich dann noch um etwa 1 cm, bei welcher Stelle eine Weite von 5 cm erreicht ist, und läuft dann in einen rechtwinklig abstehenden flachen Rand von 1 cm Breite aus, der mit Smirgel sorgfältig eben geschliffen ist.

In einer Durchbohrung des Kautschukpfropfens lässt sich ein  $2\frac{1}{2}$  mm starker Glasstab mit Reibung auf- und abschieben, dessen oberes Ende zu einem Knopf verdickt ist. Auf diesen Stab ist zunächst ein mitten durchbohrtes Metallkreuz von 2 cm Armlänge und darunter eine ebene, leicht biegsame Kautschukscheibe von 4 cm Durchmesser geschoben. Beide Theile werden unterhalb des Knopfes durch einen mit starker Reibung auf den Stab geschobenen kurzen Kautschukcylinder von 2 cm Durchmesser festgehalten, an welchem ein den Stab umgebendes, etwa 15 cm langes Säckchen von dünner Leinwand befestigt ist.

In den geöffneten Behälter ist bis zu einer markirten Stelle soviel Wasser zu giessen, dass es nach dem Herabziehen des Stabes durch die eingetauchte Leinwand und den Kautschukcylinder noch nicht bis an den Rand des Behälters gehoben wird. Wenn das Kreuz die Kautschukscheibe gegen diesen Rand andrückt, ist der Wasserbehälter genügend geschlossen, um den Feuchtigkeitsgehalt der ausserhalb befindlichen Luft unverändert zu lassen. Der eben geschliffene Rand des Bodens wird dann mit Talg bestrichen und ein mit ebensolchem Rande versehener 12 cm hoher, 5 cm weiter Recipient fest darauf gedrückt, in welchen oben ein  $2\frac{3}{4}$  bis 3 mm weites und 30 cm langes Manometer, das zur Hälfte mit Rüböl gefüllt wird, entweder eingeschmolzen oder in einen Hohlconus eingesetzt ist.

Der Stab ist dann in die Höhe zu schieben, und die mit ihm emporgezogene feuchte Leinwand sättigt die Luft

sehr  
Manom-  
zustelle  
einzuhö-  
Weite  
und ei-  
den B

U  
bringe  
Tubus  
zwisch  
komm  
eingeh  
nes U  
sodass  
befind  
30° n  
ausse  
mit s  
gleich  
Recip  
schüt  
leicht  
milli

für  
dure  
schli  
von  
Ran  
cipi

und  
sorg  
Ver  
Ver  
tig  
talgi

sehr bald mit Wasserdampf, dessen Druckerhöhung sich am Manometer zeigt. Um eine grosse Verdunstungsfläche herzustellen, ist es zweckmässig, an einigen Stellen Drahtringe einzuheften, welche bewirken, dass das Säckchen, zu voller Weite und Länge ausgedehnt, aus dem Wasser gehoben wird und ebenso bei der Abwärtsbewegung ohne Hinderniss in den Behälter sinkt.

Um ein Thermometer im Innern des Apparates anzu bringen, ist oben in den Recipienten ein schwach conischer Tubus so eingeschmolzen, dass das Thermometer mitten zwischen der Leinwandfläche und der Gefässwand zu stehen kommt. Das Thermometer wird entweder mit Klebwachs eingekittet, oder noch besser an einer verdickten Stelle seines Umhüllungsrohrs mit Smirgel in den Tubus eingedreht, sodass die Quecksilberkugel etwa in halber Gefässhöhe sich befindet, und dann mit Talg dicht eingesetzt. Die bis etwa  $30^{\circ}$  reichende Scala muss, soweit sie zu verwenden ist, ausserhalb des Apparates abzulesen sein. Der Apparat wird mit seinem Wasserbehälter in einen mit Tuch ausgekleideten gleichhohen Metallcylinder eines Dreifusses gesetzt, und der Recipient durch eine Papprolle vor äusseren Einflüssen geschützt. Am Manometer lässt sich mit zwei Klemmen ein leichter Maassstab befestigen, dessen Intervalle Zehntel millimetern Quecksilberdruck entsprechen.

Die Reinigung des Apparates und seine Vorbereitung für eine neue Messung ist äusserst einfach. Man hat nur durch Herabziehen des Stabes das Wasserreservoir zu schliessen, den Recipienten vom Boden abzuschieben, das von beiden Randflächen abgeschabte Talg wieder auf den Rand des Bodens zu streichen und allenfalls noch den Recipienten auszutrocknen.

Wenn nur der Kautschukpfropfen an den Bodenhals und den durchgezogenen Stab wasserdicht anschliesst, so sorgt das darüber befindliche Wasser selbst für luftdichten Verschluss; Thermometer und Manometer bleiben in steter Verbindung mit dem Recipienten. Zur Sicherung der Dichtigkeit ist also beim Gebrauch nur auf die sorgfältige Eintalgung des Bodenrandes zu achten. Jedesmal ist der Re-

cipient so aufzusetzen, dass das Thermometer beim Heben des Stabes nicht von einem Arm des Kreuzes, sondern vom Rande der Kautschuckscheibe getroffen wird, welche dem Thermometer durch Abwärtsbiegen leicht ausweicht.

Der ganze mit Luft gefüllte innere Raum bis zur Manometerflüssigkeit betrage  $V$  ccm, wie überhaupt in der folgenden Berechnung alle Dimensionen in Centimetern zu verstehen sind; die durch den eingeschobenen Stab bewirkte Raumverminderung sei  $v$ , der Querschnitt des Manometers  $q$ . Beim Andrücken des Recipienten sei durch innere Compression das Oel im Manometer um  $h$  gestiegen. Diese Druckänderung könnte nur durch Anbringen einer zuletzt zu schliessenden kleinen Oeffnung ganz beseitigt werden, was den Gebrauch umständlicher machen würde. Das anfängliche Volumen der Luft ist also  $V + \frac{qh}{2}$ , der innere Gesamtdruck  $b + h \cdot \frac{s}{\sigma}$ , wenn der äussere Luftdruck  $b$ , das spezifische Gewicht des Oels  $s$ , des Quecksilbers  $\sigma$  ist. Der

Druck der trocknen Luft ergibt sich  $(b - e) \cdot \frac{b + h \cdot \frac{s}{\sigma}}{b}$ , wenn  $e$  den herrschenden Dunstdruck bezeichnet. Hat sich vom Schluss des Apparates bis zur Ablesung die Temperatur  $t$  in  $T$  geändert, ist dabei der Manometerstand von  $h$  bis auf  $H$  gestiegen, und bezeichnet  $E$  den für die Temperatur  $T$  geltenden Maximaldruck des Wasserdampfes, so ergibt sich die Gleichung:

$$E + (b - e) \cdot \frac{b + h \cdot \frac{s}{\sigma}}{b} \cdot \frac{V + \frac{qh}{2}}{V + \frac{qH}{2} - v} \cdot \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} = b + H \cdot \frac{s}{\sigma} \quad \text{oder:}$$

$$E + (b - e) \cdot \left(1 + \frac{h}{b} \cdot \frac{s}{\sigma}\right) \cdot \left(1 + \frac{v - \frac{q}{2} \cdot (H - h)}{V + \frac{qH}{2} - v}\right) \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{T - t}{1 + \alpha t}\right) = b + H \cdot \frac{s}{\sigma}.$$

Für die angegebenen Dimensionen des Apparates fallen in den drei eingeklammerten Summen auf der linken Seite der Gleichung die zweiten Summanden im Vergleich zum ersten Summandus 1 so klein aus, dass in dem Product dieser

Klamm  
2. Ord  
nung v

E + b

also:

$e = E$

In dies  
durch  
aus en  
welche  
ler der  
diesem  
des R  
ganz u  
Beobac

W

1

$\frac{s}{\sigma} + \frac{H}{2}$   
mit M  
Gröss  
Dann  
mittle  
dass e

worin

Gröss  
zu b  
Manc

Klammergrössen als Coefficient für  $b$  die kleinen Grössen 2. Ordnung, und als Coefficient für  $e$  sogar diejenigen 1. Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Es ist demnach:

$$E + b \cdot \left\{ 1 + \frac{h}{b} \cdot \frac{s}{\sigma} + \frac{v - \frac{q}{2} \cdot (H-h)}{V + \frac{qH}{2} - v} + \frac{\alpha \cdot (T-t)}{1 + \alpha t} \right\} - e = b + H \cdot \frac{s}{\sigma},$$

also:

$$e = E + \frac{bv}{V + \frac{qH}{2} - v} + \frac{b\alpha \cdot (T-t)}{1 + \alpha t} - (H-h) \cdot \left( \frac{s}{\sigma} + \frac{1}{2} - \frac{bq}{V + \frac{qH}{2} - v} \right).$$

In dieser Gleichung darf noch  $V + \frac{qH}{2} - v$  durch  $V$ , und  $b$  durch einen mittlern Werth 76 ersetzt werden, weil die hieraus entstehenden kleinen Fehler unter denjenigen liegen, welche im letzten Gliede  $\frac{b\alpha(T-t)}{1 + \alpha t}$  durch die möglichen Fehler der Temperaturbeobachtung sich ergeben können. Aus diesem Grunde sind auch Correctionen für die Ausdehnung des Rübols und für Abweichungen des Barometerstandes ganz unnöthig, wenn der letztere nur während der Dauer der Beobachtung sich nicht geändert hat. Es ist also:

$$e = E + 76 \cdot \frac{v}{V} + 76 \cdot \frac{T-t}{273+t} - (H-h) \cdot \left( \frac{s}{\sigma} + \frac{76q}{2V} \right).$$

Wird der Maassstab so eingerichtet, dass die Intervalle

$$\frac{1}{\frac{s}{\sigma} + \frac{38q}{V}} \text{ mm gross sind, so sind dieselben gleichbedeutend}$$

mit Millimetern Quecksilberdruck und können wegen ihrer Grösse von etwa 13 mm noch in Zehntel getheilt werden. Dann ist es zweckmässig, auch die Grössen  $e$ ,  $E$  und den mittleren Barometerstand in Millimetern auszudrücken, so dass die Formel lautet:

$$e = E + 760 \cdot \frac{v}{V} + 760 \cdot \frac{T-t}{273+t} - (H-h),$$

worin  $760 \cdot \frac{v}{V}$  eine Constante ist, welche jedesmal zu der Grösse  $E$  addirt wird;  $760 \cdot \frac{T-t}{273+t}$  ist für jede Beobachtung zu berechnen,  $H-h$  ergibt sich als Differenz der beiden Manometerablesungen direct in ganzen und zehntel Milli-

metern. Wegen des bedeutenden Einflusses einer Temperaturänderung auf den Manometerstand ist die Differenz  $T - t$  mit möglichster Genauigkeit zu ermitteln und deshalb ein in Fünftelgrade getheiltes Thermometer nöthig, dessen Theile gross genug sind, um noch eine sichere Schätzung von Fünfteln zuzulassen, welche etwa Zehntelmillimetern in Druck gleichwerthig sind. Sollte die Zeit zwischen beiden Ablesungen ausnahmsweise gross sein, und der Barometerstand sich etwas geändert haben, so wird diese Änderung mit entgegengesetztem Vorzeichen zu dem berechneten Werthe von  $e$  hinzugefügt.

Hamburg, im Januar 1880.

---

**XI. Ueber einen allgemeinen Satz von  
Hrn. R. Clausius in Bezug auf electrische Influenz;  
von G. J. Legebeke.**

In Bd. 1. dieser Annalen theilte Hr. R. Clausius einen Satz mit über den Zusammenhang zwischen den electrischen Ladungen einer willkürlichen Anzahl von Conductoren, welche influenzirend aufeinander einwirken. Der Autor erachtet diesen Satz als sehr allgemein und neu und nimmt ihn auch im zweiten Theile seiner mechanischen Wärmetheorie auf, p. 33. Ich wünsche darauf hinzuweisen, dass der Satz von Clausius ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes ist, der selbst wieder als eine Erweiterung einer bekannten Gleichung von Gauss betrachtet werden kann.

Ueber jeder der geschlossenen,  $C_1$ ,  $C_2$  etc., im allgemeinen  $C$  genannten Oberflächen, ist eine Schicht von einem gewissen Agens ausgebreitet, welches nach den gewöhnlichen Gesetzen anziehend oder abstossend wirkt, und zwar wird die Dichtigkeit des Agens in Punkten von:

$C_1$ ,  $C_2$  etc.  $C$

dargestellt durch:

$$h_1, h_2 \text{ etc. } h,$$

und das Potential aller dieser Schichten in denselben Punkten durch:

$$V_1, V_2 \text{ etc. } V.$$

Zweitens werden die Schichten auf  $C_1, C_2$  etc.  $C$ , durch Schichten mit den Dichtigkeiten:

$$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \text{ etc. } \mathfrak{h}$$

ersetzt, deren Potentiale sind:

$$\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2 \text{ etc. } \mathfrak{V}.$$

Nun gilt allgemein, wenn  $dw_1, dw_2$  etc.  $dw$  die Oberflächen-elemente von  $C_1, C_2$  etc.  $C$  vorstellen:

$$\begin{aligned} & \int V_1 \mathfrak{h}_1 dw_1 + \int V_2 \mathfrak{h}_2 dw_2 + \text{etc.} \\ & = \int \mathfrak{V}_1 h_1 dw_1 + \int \mathfrak{V}_2 h_2 dw_2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

oder auch:

$$(1) \quad \sum \int V \mathfrak{h} dw = \sum \int \mathfrak{V} h dw.$$

Vor dem Beweise dieses Satzes bemerke ich, dass er unmittelbar auf eine Anzahl leitender Körper  $C_1, C_2$  etc. angewandt werden kann, die auf zwei verschiedene Weisen mit Electricität geladen sind und influenzirend aufeinander einwirken. Dann nämlich sind die Potentiale  $V$  und  $\mathfrak{V}$  Constanten, welche die Potentialniveaux der Leiter ausdrücken, und die Gleichung (1) geht über in die Gleichung von Clausius.

Um die obenstehende Gleichheit zu beweisen, wird ebenso wie bei Clausius von der bekannten Gleichung von Green ausgegangen. Diese Gleichung wird für den durch die Oberfläche  $C$  eingeschlossenen Raum angewandt, und für die beiden Functionen, welche darin vorkommen, nehme ich  $V_i$  und  $\mathfrak{V}_i$ , wovon die erste das Potential aller Schichten mit Dichtigkeiten  $h$  und die zweite das Potential der Schichten mit Dichtigkeiten  $\mathfrak{h}$ , — beide Potentiale in Punkten innerhalb  $C$  genommen — vorstellt.

Man hat dann:

$$\int V_i \frac{d\mathfrak{B}_i}{dn} dw = \int \mathfrak{B}_i \frac{dV_i}{dn} dw.$$

Die Operation  $\frac{d}{dn}$  ist die Differentiation nach der innerhalb  $C$  gezogenen Normale. Durch aufeinander folgende Anwendung des Theorems von Green auf die durch alle Oberflächen eingeschlossenen Räume erhalten wir nach der Summation:

$$(2) \quad \sum \int V_i \frac{d\mathfrak{B}_i}{dn} dw = \sum \int \mathfrak{B}_i \frac{dV_i}{dn} dw'.$$

Ferner wird der Satz von Green auf den Raum ausserhalb der Oberflächen  $C$  angewandt, welchen Raum man erst durch eine Kugeloberfläche begrenzt hat, deren Mittelpunkt und Radius so angenommen sind, dass alle Oberflächen  $C$  innerhalb dieser Kugel liegen. Die Potentiale der Schichten  $h$  und  $\mathfrak{h}$  in Punkten ausserhalb der Oberflächen  $C$  werden resp. dargestellt durch  $V_a$  und  $\mathfrak{B}_a$ , und diese Functionen in der Gleichung von Green substituirt. Auf gewöhnliche Weise findet man dann, wenn der Radius der Kugel unendlich gross genommen wird:

$$(3) \quad \sum \int V_a \frac{d\mathfrak{B}_a}{dN} dw = \sum \int \mathfrak{B}_a \frac{dV_a}{dN} dw.$$

Die Operation  $\frac{d}{dN}$  ist die Differentiation nach der ausserhalb der Oberfläche  $C$  gezogenen Normale. Die Functionen  $V_i$  und  $V_a$  in den Gleichungen (2) und (3) haben für denselben Punkt von einer der Oberflächen  $C$  natürlich denselben Werth und zwar  $V$ , ebenso die Functionen  $\mathfrak{B}_i$  und  $\mathfrak{B}_a$ , die beide in  $\mathfrak{B}$  übergehen. Nicht so ist es mit den Differentialquotienten nach der Normale.

Sei bei den Dichtigkeiten  $h$  das Potential der Schicht auf der Oberfläche  $C$  in Punkten innerhalb  $C$  dargestellt durch  $P_i$  und das Potential der übrigen Schichten durch  $\Pi_i$ , ebenso das Potential der Schicht auf  $C$  in Punkten ausserhalb  $C$  durch  $P_a$  und das der übrigen Schichten durch  $\Pi_a$ , so ist:

$$\frac{dV_i}{dn} = \frac{dP_i}{dn} + \frac{d\Pi_i}{dn} \quad \text{und} \quad \frac{dV_a}{dN} = \frac{dP_a}{dN} + \frac{d\Pi_a}{dN}.$$

Offenbar ist für Punkte von  $C$ :

$$\frac{d\Pi_i}{dn} = - \frac{d\Pi_a}{dN},$$

und nach einer bekannten Eigenschaft:

$$\frac{dP_i}{dn} + \frac{dP_a}{dN} = - 4\pi \varepsilon h,$$

worin  $\varepsilon$  eine Constante vorstellt. Man findet daher:

$$\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_a}{dN} = - 4\pi \varepsilon h$$

und vollkommen auf dieselbe Weise:

$$\frac{d\mathfrak{V}_i}{dn} + \frac{d\mathfrak{V}_a}{dN} = - 4\pi \varepsilon \mathfrak{h}.$$

Durch Summirung beider Glieder der Gleichungen (2) und (3) erhält man also:

$$\sum \int V \mathfrak{h} dw = \sum \int \mathfrak{V} h dw.$$

Schliesslich bemerke ich, dass diese allgemeine Gleichung als eine Erweiterung einer von Gauss gegebenen Eigenschaft anzusehen ist. Stelle  $V$  das Potential eines Systems von Massen  $m_1, m_2$  etc. vor, die sich in den Punkten  $p_1, p_2$  etc. befinden, und  $\mathfrak{V}$  das Potential von Massen  $m_1, m_2$  etc. in den Punkten  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$  etc.; ferner  $V_1, V_2$  etc. die Werthe von  $V$  in den letzteren Punkten und  $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2$  etc. die Werthe von  $\mathfrak{V}$  in den Punkten  $p_1, p_2$  etc., so ist nach Gauss:

$$V_1 m_1 + V_2 m_2 + \text{etc.} = \mathfrak{V}_1 m_1 + \mathfrak{V}_2 m_2 + \text{etc.}$$

$$\Sigma V m = \Sigma \mathfrak{V} m.$$

Diese Gleichung ist identisch, da beide Glieder Aggregate derselben Combinationen darstellen. Dass der Satz noch gültig bleibt, wenn man zuerst die Massen  $m$  auf einer Oberfläche  $C$  ausbreitet und hernach die Massen  $m$  auf derselben Oberfläche, wird von Gauss<sup>1)</sup> nicht vollständig bewiesen, sondern „die Art, wie diese Erweiterung des Satzes

1) Gauss. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. §. 19.

streng gerechtfertigt werden kann, nur nach ihren Hauptmomenten“ angedeutet.

Im Obigen ist dieser Satz für eine willkürliche Anzahl von Oberflächen als eine einfache Folgerung aus der Green'schen Gleichung bewiesen.

Utrecht, Jan. 1880.

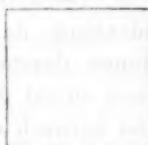
## XII. Ueber eine Augentäuschung beim Anblick geometrischer Figuren; von W. Holtz.

Ich glaube wohl, dass die Augentäuschung, von der ich im Folgenden handeln will, vor mir schon manchem Anderen aufgefallen ist, aber ich weiss nicht, dass dieselbe bisher öffentlich besprochen, oder der Versuch gemacht ist, eine Erklärung dafür zu geben. Mir bot sich die fragliche Wahrnehmung und gleichzeitig die Erklärung, als ich mich mit körperlichen Zeichnungen befasste.

Es handelt sich nämlich darum, dass uns geometrische Figuren in der Richtung von links nach rechts kürzer erscheinen, als sie wirklich sind, ein Quadrat also mehr oder weniger als ein Rechteck, eine Kugel in gleicher Weise wie eine Ellipse. Eine unmittelbare Folge dieser Täuschung ist, dass, wenn wir solche Figuren nach dem Augenmaasse zeichnen, wir umgekehrt die horizontalen Dimensionen unbewusst länger nehmen, als wir in Wirklichkeit sollten. Drehen wir dann aber das Blatt um einen Winkel von  $90^\circ$ , so tritt die Verkehrtheit der Zeichnung um so deutlicher

hervor. Die nebenstehenden Figuren sind solcher-gestalt gezeichnet; in der einen wollte ich einen Kreis darstellen, in der andern ein Quadrat. Ich hoffe auch, dass die Figuren bei der gewöhnlichen Haltung des Buches so erscheinen,

während jeder bei einer Drehung um  $90^\circ$  leicht erkennen wird, dass jene eine Ellipse, und diese ein Rechteck ist.



Der Grund gedachter Täuschung liegt nun wohl ohne Zweifel darin, dass wir im gewöhnlichen Leben viel häufiger Körpern, als geometrischen Figuren zu begegnen pflegen, und infolge dessen geneigt sind, die Umrisse solcher Figuren für die Umrisse wirklicher Körper hinzunehmen. Von einem Körper aber sehen wir allemal in horizontaler Richtung mehr, als in verticaler, weil wir mit zwei Augen sehen, und diese in einer horizontalen Linie liegen. Der Umriss einer Kugel erscheint uns wirklich als eine Ellipse, weil wir in der Richtung von links nach rechts mehr als die Hälfte der Kugel sehen. Schauen wir einen wirklichen Kreis, so erscheint uns dieser also, weil wir ihn für den Umriss einer Kugel halten, horizontal verkürzt, und wollen wir einen wirklichen Kreis darstellen, so zeichnen wir unbewusst den Umriss einer Kugel.

Daher geschieht es denn auch, dass die Täuschung noch viel vollständiger, aber auch gewissermassen mehr berechtigt wird, wenn wir den Figuren oder dem Blatt Papier, auf welchem sie stehen, irgend welche Schattenstriche geben, weil wir hierdurch die Vorstellung bestärken, als ob es sich nicht um Figuren, sondern um wirkliche körperliche Gebilde handelte.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit daran erinnern, dass die Darstellung von Kugeln in perspektivischen Zeichnungen, wenn dieselben nicht wie Ellipsoide erscheinen sollen, auch nur durch freihändige Zeichnung möglich ist, oder, wenn man durchaus den Zirkel benutzen will, allenfalls dadurch, dass man von zwei in horizontaler Richtung ein wenig entfernten Punkten zwei Halbkreise schlägt. Es bedarf eben einer Ellipse als Umrisses, wenn das Gebilde nicht als ein Ellipsoid, sondern als eine Kugel erscheinen soll.

188

**XIII. Reflexion und Brechung des Lichtes  
an sphärischen Flächen unter Voraussetzung end-  
licher Einfallswinkel; von F. Lippich.**

Unter dieser Ueberschrift hat Reusch<sup>1)</sup> Untersuchungen veröffentlicht, in denen Sätze und Formeln enthalten sind, zu denen ich in meinen Arbeiten: „Ueber Brechung und Reflexion unendlich dünner Strahlenbündel an Kugelflächen“<sup>2)</sup>, und „Ueber den Gang der Lichtstrahlen in einer homogenen Kugel“<sup>3)</sup>, ebenfalls gelangt bin. Obgleich von mir hauptsächlich die räumlichen Beziehungen zwischen Object und Bild bei endlichem Einfallswinkel des Strahlensystems in Betracht gezogen werden, so bildet doch die speciellere Abhängigkeit conjugirter Punkte, die auf den Axen der Bündel liegen, den Ausgangspunkt meiner Untersuchungen, und ich bedauere lebhaft, erst jetzt die Abhandlung von Reusch kennen gelernt zu haben, in welcher diese grundlegenden Sätze, wenn auch theilweise in anderer Art als bei mir entwickelt, sich vorfinden. Ich hätte sonst gewiss nicht er-mangelt, an betreffender Stelle die ihm gebührende Priorität bezüglich der fraglichen Sätze entsprechend hervorzuheben, was ich hiermit nachzutragen mich verpflichtet fühle.

Prag, den 16. Februar 1880.

1) Reusch, Pogg. Ann. **130**. p. 497. 1867.

2) Lippich, Denkschr. d. Wien. Acad. **38**. 1877.

3) Lippich, Wien. Ber. **79**. 1879.